基礎マクロ練習問題：リスクがあるときの意思決定と資産価格理論入門

日野将志 *

目次

---

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

1　資産価格理論入門の入門

1.1　無裁定条件

1.1.1　資産価格 q

この経済に不確実性や何らの摩擦もないとする．利子率が $1+r$ で決まっているとする．この経済に新たな資産を導入することを考える．この資産価格を q とする．資産価格とは，今期に財を q 単位支払うと，来期 1 単位の財がもらえるというものである．このとき，無裁定条件から成立する q を r を用いて書け．

1.1.2　長期資産

この経済に不確実性や何らの摩擦もないとする．この経済では 1 期間の利子率が $1+r$ で決まっているとする．ここで，来々期に利子率 r_2 を支払うような長期資産を導入することを考える．つまり，この長期資産は，来期には利子率の支払いはなく，来々期に r_2 を支払う．このとき，無裁定条件から成立する q を r を用いて書け．

2　不確実性と意思決定，および資産価格理論入門

2.1　効用関数とリスク選好

家計消費の練習問題で代表的な効用関数を紹介した．それらがリスク回避的であるか，中立的であるか，愛好的であるか，確認せよ．具体的に，考えてほしい効用関数は次のとおりである．

1. 対数効用

$$u(c) = \log(c)$$

2. CRRA 型

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

なお $\sigma > 0$ とする

3. 2 次効用

$$u(c) = \alpha c - \frac{\gamma c^2}{2}$$

$\alpha > 0$ かつ $\gamma \geq 0$ であり，α/γ はとても大きいとする．

4. CARA 型

$$u(c) = -\frac{1}{\gamma}\exp(-\gamma c)$$

$\gamma > 0$ とする．

2.2　効用関数とリスク回避度

効用関数のリスク回避度を測る指標として，次の二つが有名であり，多くの (ミクロ) 経済学の教科書で教えられる．

- 絶対的リスク回避度

$$\sigma_A(c) = \frac{u''(c)}{u'(c)}$$

この絶対的リスク回避度は，所得等に確率的な変動があるとき，そのリスクの水準をどれだけ回避するかを測る測度である．絶対的リスク回避度が一定であれば，例えば，所得 (お小遣い) が月に 500 円のときでも，月給が 100 万円のときでも，100 円の上下というリスクが同程度に重要になる．

- 相対的リスク回避度

$$\sigma_R(c) = -\frac{cu''(c)}{u'(c)}$$

「月給 100 万円のときでも，月給 500 円のときでも同様に 100 円の上下がリスキーと考える」という絶対的リスク回避度は極端な測度である．一方，相対的リスク回避度は，所得等に確率的な変動があ

るとき，そのリスクの割合をどれだけ回避するかを測る測度である．相対的リスク回避度が一定であれば，例えば，お小遣いが月に 500 円のときでも，月給が 100 万円のときでも，所得の 1 割の変動というリスクが同程度に重要になる．

上で使った 4 つの効用関数 (対数，CRRA，2 次，CARA，) において，この二つの回避度を計算せよ．

2.3 所得のリスク：安全資産がある場合

家計の消費と貯蓄で学んだような 2 期間の最大化問題に所得のリスクを導入することを考えよう．1 期目の所得 y_1 にリスクはないとするが，2 期目の所得にリスクのある効用最大化問題を考えよう．2 期目の所得は確率 p で y_2^h，確率 $1-p$ で y_2^l になるとする．また，$y_2^h > y_2^l$ とする (つまり h の添え字は high，l の添え字は low を表している)．

2 期目の消費は，それぞれ所得が高いときと，低いときで別に考える必要がある．そのため，それぞれ c_2^h と c_2^l と書くことにする．家計は，期待効用を最大化するとする．これ以外は，家計の消費と貯蓄で学んだ最大化問題と同じとする．つまり家計は貯蓄 s を行うと，次期に確実に利子所得 $(1+r)s$ を得る[*1]．このとき，次の問に答えよ．

- 効用関数は一般形，つまり $u(c)$ のままで効用最大化問題を記述せよ
- 効用関数を CRRA 型として一階条件を求めよ
- 効用関数が CRRA のとき，一階条件から最適な貯蓄・消費のいずれも求められないことを示し，なぜ示せないか 1 行程度で述べよ
- 効用関数を 2 次の効用関数に変えよう．そして一階条件を求め，最適な貯蓄関数 s を求めよ．ここで，2 期目の所得の期待値を $\mathbb{E}[y_2] \equiv p y_2^h + (1-p) y_2^l$ と定義せよ．
- 1 期の最適な消費関数を求めよ．特に，$Y \equiv y_1 + \mathbb{E}[y_2]/(1+r)$ と定義せよ．そして，家計の消費と貯蓄の 2 次効用の問題 (2.6.3) の解答と比較せよ．
- 2 期目の消費 c_2^h と c_2^l を求めよ．そして，どちらが大きいか比較せよ．
- $\beta(1+r) = 1$ のときどうなるか？ (コメント：この条件は，リスクがないときは $c_1 = c_2$ となるための条件であった．リスクがあるときは $\beta(1+r) = 1$ はどういう条件になるだろうか？)

2.4 所得のリスク：アロー証券と完全保険

前問から引き続き，家計は 2 期目の所得のリスクに面しているとする．しかし，資産の選択肢が次のように変わるとする．前問では 1 種類の安全資産が利用可能であった．一方，ここでは，安全資産は利用不可能であり，その代わりに 2 種類の資産によって貯蓄が可能であるとする．1 つ目の資産は，y_2^h が実現したときのみにリターン $1+r^h$ をもたらす資産であり，この保有量を s^h と書くことにする．2 つ目の資産は，y_2^l が実現した時のみにリターン $1+r^l$ をもたらす資産であり，この保有量を s^l とする．他の問題設定は変化ないとする．

なお，このように，あるリスクが実現した時のみリターンが得られる証券をアロー証券 (Arrow security) という[*2]．このとき次の問に答えよ．

[*1] このように，確実なリターンをもたらす資産を安全資産 (risk-free asset, safe asset 等) と呼ぶ．
[*2] 名前の由来はアロー教授である．

- 効用関数は一般形，つまり $u(c)$ のままで効用最大化問題を記述せよ
- 効用関数を CRRA 型として一階条件を求めよ
- 効用関数が CRRA のとき，前問と一階条件は異なるか．解析的に解けそうか議論せよ
- 解ける場合，そしてそのまま，消費関数を解いてみよ．なお，$Y \equiv y_1 + \frac{y_2^h}{1+r^h} + \frac{y_2^l}{1+r^l}$ と定義すること
- $\beta p(1+r^h) = \beta(1-p)(1+r^l) = 1$ のとき，どうなるか
- このアロー証券から安全資産を生成できるか

2.5　ポートフォリオ問題

対数効用関数 $u(c) = \log c$ を持つ家計を考える．家計はこの効用の期待値を最大化するとする．

この家計は 0 期末に所得 y を持っている．この所得を 2 種類の資産によって 1 期に持ち越すことができる．一つ目は，安全資産であり，この安全資産は必ず $r^f \geq 0$ という利子率を持つ[*3]．この安全資産の保有量を a^f と書くことにする．もう一つの資産は，確率 p で r^h，確率 $1-p$ で r^l という利子率になる．ここで，$r^l < r^f < r^h$ とする．このリスク資産の保有量を a^r と書くことにする．なお，回答の便宜上，$r^h = r^f + \epsilon^h$ および，$r^l = r^f - \epsilon^l$ と利子の差分を $\epsilon^h > 0$ と $\epsilon^l > 0$ と定義すると便利かもしれない．

家計は 0 期末に所得を資産に配分することだけを行うとする．つまり 0 期の予算制約は，

$$a^f + a^r = y$$

とする．

そして 1 期に得られた資産所得から消費を行う．つまり，1 期の予算制約は，

$$\begin{aligned} c^h &= (1+r^f)a^f + (1+r^h)a^r \quad \text{when } r^h \\ c^l &= (1+r^f)a^f + (1+r^l)a^r \quad \text{when } r^l \end{aligned}$$

とする．

このとき，次の問に答えよ．

1. 家計の目的関数を書け
2. 効用最大化問題を記述せよ
3. 一階条件を求め，最適な安全資産の保有量を求めよ
4. 最適なリスク資産の保有量を求めよ
5. 例えばリスク資産について，良い利回りが実現する確率 p が上昇したとき，家計はリスク資産と安全資産のどちらを増やすか？上記の回答および計算にもとづいて答えよ．

2.6　2 期間のルーカス・ツリー (リスク資産のみの場合)

ルーカス・ツリーと呼ばれる資産価格を 2 期間にして，ここでは扱おう．

純粋交換経済を考える．家計は 1 人だけ存在し，1 種類の資産を利用して貯蓄ができる．この資産の t 期における価格は p_t であり，毎期 d_t という配当が得られる[*4]．この配当は多いときもあれば少ないときもあ

[*3] 上付きの f は risk-Free からきている．

[*4] この資産をイメージするには，ヤシの木のみある無人島に一人たどり着き，このヤシの木の価格が p_t，ヤシの実が d_t と思うと良いかもしれない．この例が有名なため，開発者の Lucas 教授にあやかり Lucas Tree と呼ばれる．

り，確率的な変数とする．この資産の保有量は s_t で書くことにする．家計ははじめから $s_0 = 1$ だけ資産を保有しているとする．

すると，予算制約は，

$$c_1 + p_1 s_1 = [p_1 + d_1]$$
$$c_2 + p_2 s_2 = [p_2 + d_2] s_1$$

と書ける．ここで，これまでと異なり，2 期目に s_2 という貯蓄手段があることを仮定している．なお，家計は借金を残して死ぬことは出来ないとする．つまり，$s_2 \geq 0$ とする．

さらに効用関数は

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

とする．

このとき，次の問に答えよ．

1. 最大化問題を記述せよ
2. 家計の s_2 の需要量を求めよ．
3. 一階条件を記述せよ
4. この経済には資産の供給は 1 単位のみあるとする．つまり資産市場の均衡条件は $s_t = 1$ とする．このとき，財市場の均衡条件はどのようになるか，求めよ．
5. p_2 は均衡でどのような値になるか，推論せよ．
6. このとき，資産価格はどのように決まるか，解釈を述べよ

2.6.1　ルーカス・ツリーの消費的側面

前問と同じルーカス・ツリーのモデルの消費の側面をより深く考えてみよう．なお，効用関数を対数効用関数に変更しよう．

そのために，次の問に答えよ．なお，資産市場の均衡条件 $s_t = 1$ を使わないこと．

1. 生涯予算制約を求めよ
2. オイラー方程式を求めよ
3. 1,2 で求めた方程式は，家計の消費・貯蓄で学んだモデルとどのような共通点があるか．変数をうまく定義することで，共通点を考えてみよ (ヒント：利子率と生涯所得を考えてみよ)．
4. 消費関数を求めよ
5. 仮に，1 期の資産価格 p_1 が上昇すると，1 期の消費はどうなるか？この資産に対する限界消費性向と，家計の消費・貯蓄で学んだモデルの所得に対する限界消費性向はどのように異なるか？