

基礎マクロ：企業投資

日野将志

一橋大学

2021

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

前回までに、家計消費 C の理論を学んだ。

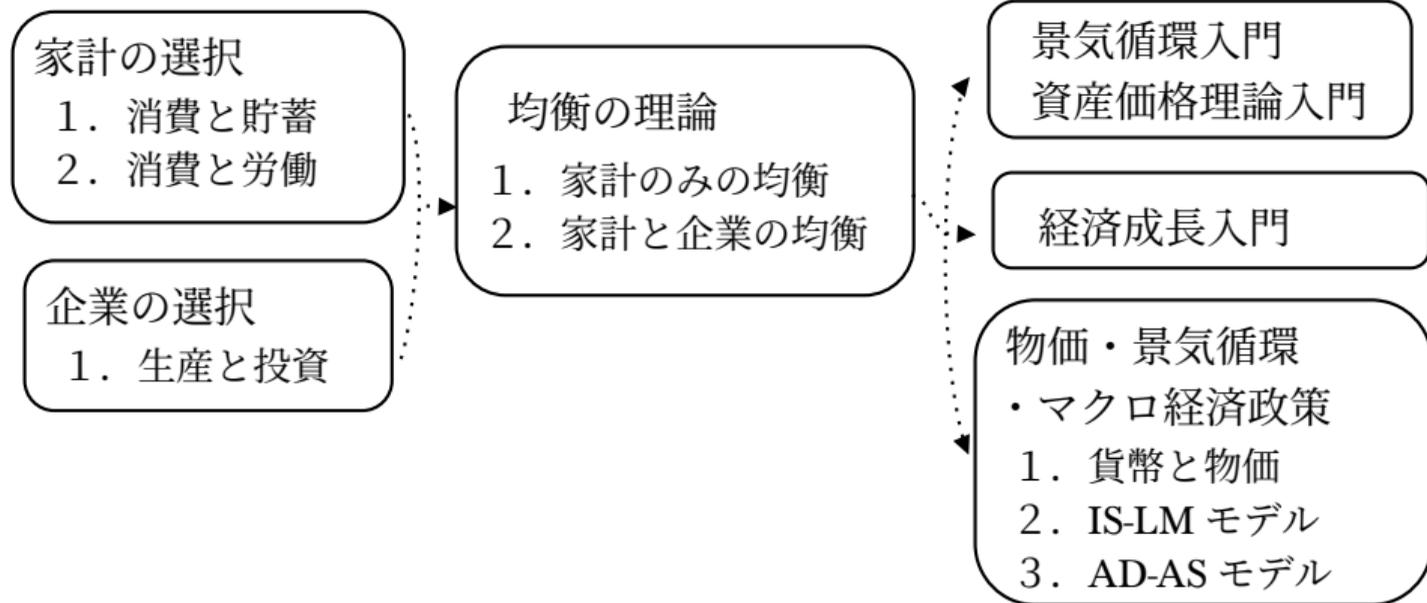
今回は

$$C + I + G = Y$$

の投資 I の理論を学ぶ。

- ▶ Kurlat 8 章
- ▶ 二神・堀 3 章，宮尾 4 章

ロードマップ：それぞれの関係



マクロ経済学において、一般的に、**資本** (capital) K とは、労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- ▶ **生産要素**とは生産に使うもの。主に労働と資本。
- ▶ 資本の例：
 - ▶ オフィス用品, PC, 工具, 建物, 工場
- ▶ 資本でも労働でもないものの例：
 - ▶ 経営者の経営手腕, 組織運営の効率, 秘伝の技術
- ▶ **投資** I とは、一般に、資本を購入すること (売却は負の投資)

$$\underbrace{K_{t+1}}_{\text{来期に所有する資本}} = \underbrace{I_t}_{\text{今期の投資}} + \underbrace{(1 - \delta)K_t}_{\text{今期から持ち越す分}}$$

$\delta \in (0, 1)$ は資本減耗率

- ▶ 日常用語との区別：株式投資 \neq 投資

企業投資は景気循環にとっても大きく反応する

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

マクロ経済学において、一般的に、**資本** (capital) K とは、労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- ▶ **生産要素**とは生産に使うもの。主に労働と資本。
- ▶ 資本の例：
 - ▶ オフィス用品, PC, 工具, 建物, 工場
- ▶ 資本でも労働でもないものの例：
 - ▶ 経営者の経営手腕, 組織運営の効率, 秘伝の技術
- ▶ **投資** I とは、一般に、資本を購入すること (売却は負の投資)

$$\underbrace{K_{t+1}}_{\text{来期に所有する資本}} = \underbrace{I_t}_{\text{今期の投資}} + \underbrace{(1 - \delta)K_t}_{\text{今期から持ち越す分}}$$

$\delta \in (0, 1)$ は資本減耗率

- ▶ 日常用語との区別：株式投資 \neq 投資

企業投資は景気循環にとっても大きく反応する

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

マクロ経済学において、一般的に、**資本** (capital) K とは、労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- ▶ **生産要素**とは生産に使うもの。主に労働と資本。
- ▶ 資本の例：
 - ▶ オフィス用品, PC, 工具, 建物, 工場
- ▶ 資本でも労働でもないものの例：
 - ▶ 経営者の経営手腕, 組織運営の効率, 秘伝の技術
- ▶ **投資** I とは、一般に、資本を購入すること (売却は負の投資)

$$\underbrace{K_{t+1}}_{\text{来期に所有する資本}} = \underbrace{I_t}_{\text{今期の投資}} + \underbrace{(1 - \delta)K_t}_{\text{今期から持ち越す分}}$$

$\delta \in (0, 1)$ は資本減耗率

- ▶ 日常用語との区別：株式投資 \neq 投資

企業投資は景気循環にとっても大きく反応する

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

マクロ経済学において、一般的に、**資本** (capital) K とは、労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- ▶ **生産要素**とは生産に使うもの。主に労働と資本。
- ▶ 資本の例：
 - ▶ オフィス用品, PC, 工具, 建物, 工場
- ▶ 資本でも労働でもないものの例：
 - ▶ 経営者の経営手腕, 組織運営の効率, 秘伝の技術
- ▶ **投資** I とは、一般に、資本を購入すること (売却は負の投資)

$$\underbrace{K_{t+1}}_{\text{来期に所有する資本}} = \underbrace{I_t}_{\text{今期の投資}} + \underbrace{(1 - \delta)K_t}_{\text{今期から持ち越す分}}$$

$\delta \in (0, 1)$ は資本減耗率

- ▶ 日常用語との区別：株式投資 \neq 投資

企業投資は景気循環にとっても大きく反応する

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

マクロ経済学において、一般的に、**資本** (capital) K とは、労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- ▶ **生産要素**とは生産に使うもの。主に労働と資本。
- ▶ 資本の例：
 - ▶ オフィス用品, PC, 工具, 建物, 工場
- ▶ 資本でも労働でもないものの例：
 - ▶ 経営者の経営手腕, 組織運営の効率, 秘伝の技術
- ▶ **投資** I とは、一般に、資本を購入すること (売却は負の投資)

$$\underbrace{K_{t+1}}_{\text{来期に所有する資本}} = \underbrace{I_t}_{\text{今期の投資}} + \underbrace{(1 - \delta)K_t}_{\text{今期から持ち越す分}}$$

$\delta \in (0, 1)$ は資本減耗率

- ▶ 日常用語との区別：株式投資 \neq 投資

企業投資は景気循環にとっても大きく反応する

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

企業の意味決定の例

投資

日野将志

企業の意味決定は色々な側面がある。

- ▶ 参入
 - ▶ 新しい会社の設立, 新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- ▶ 倒産・撤退
- ▶ 価格設定
 - ▶ 定価の変更, セール,
- ▶ 新製品の開発や既存製品の撤廃
 - ▶ 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone), 別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- ▶ 投資
 - ▶ 新しい工場や設備 (e.g., JR のリニア, 携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える。他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題: 投資

トービンの Q 理論: 調整費用の無い場合

補足: トービンの Q と凸型調整費用

企業の意思決定の例

投資

日野将志

企業の意思決定は色々な側面がある。

- ▶ 参入
 - ▶ 新しい会社の設立, 新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- ▶ 倒産・撤退
- ▶ 価格設定
 - ▶ 定価の変更, セール,
- ▶ 新製品の開発や既存製品の撤廃
 - ▶ 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone), 別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- ▶ 投資
 - ▶ 新しい工場や設備 (e.g., JR のリニア, 携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える。他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題: 投資

トービンの Q 理論: 調整費用の無い場合

補足: トービンの Q と凸型調整費用

企業の意思決定は色々な側面がある。

- ▶ 参入
 - ▶ 新しい会社の設立, 新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- ▶ 倒産・撤退
- ▶ 価格設定
 - ▶ 定価の変更, セール,
- ▶ 新製品の開発や既存製品の撤廃
 - ▶ 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone), 別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- ▶ 投資
 - ▶ 新しい工場や設備 (e.g., JR のリニア, 携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える。他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題: 投資

トービンの Q 理論: 調整費用の無い場合

補足: トービンの Q と凸型調整費用

企業の意味決定は色々な側面がある。

- ▶ 参入
 - ▶ 新しい会社の設立, 新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- ▶ 倒産・撤退
- ▶ 価格設定
 - ▶ 定価の変更, セール,
- ▶ 新製品の開発や既存製品の撤廃
 - ▶ 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone), 別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- ▶ 投資
 - ▶ 新しい工場や設備 (e.g., JR のリニア, 携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える。他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題: 投資

トービンの Q 理論: 調整費用の無い場合

補足: トービンの Q と凸型調整費用

企業の意思決定は色々な側面がある。

- ▶ 参入
 - ▶ 新しい会社の設立, 新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- ▶ 倒産・撤退
- ▶ 価格設定
 - ▶ 定価の変更, セール,
- ▶ 新製品の開発や既存製品の撤廃
 - ▶ 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone), 別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- ▶ 投資
 - ▶ 新しい工場や設備 (e.g., JR のリニア, 携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える。他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題: 投資

タービンの Q 理論: 調整費用の無い場合

補足: タービンの Q と凸型調整費用

企業の意思決定は色んな側面がある.

- ▶ 参入
 - ▶ 新しい会社の設立, 新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- ▶ 倒産・撤退
- ▶ 価格設定
 - ▶ 定価の変更, セール,
- ▶ 新製品の開発や既存製品の撤廃
 - ▶ 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone), 別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- ▶ 投資
 - ▶ 新しい工場や設備 (e.g. JR のリニア, 携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える. 他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題: 投資

トービンの Q 理論: 調整費用の無い場合

補足: トービンの Q と凸型調整費用

このスライドで扱う内容

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

計算例： K^α

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

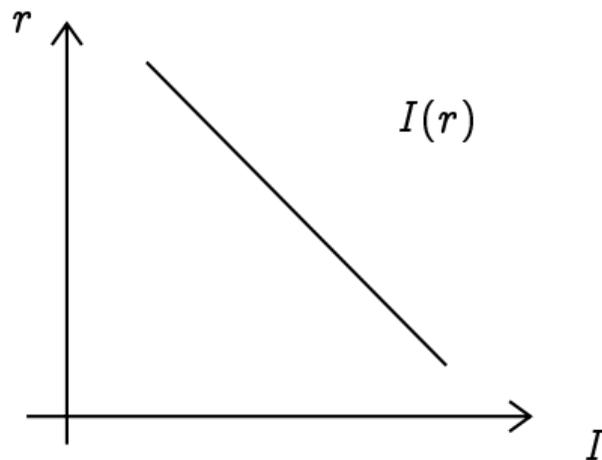
企業の投資は利率に反応する

- ▶ **理由 1**：利率が低いと借入がしやすい
 - ▶ 借金をしても利払いの負担が低い
- ▶ **理由 2**：投資の代わりに資産運用をしても利回りが低い
 - ▶ 投資の機会費用が小さい

⇒ 投資は利率の減少関数

$$I = I(r), \quad I'(r) < 0$$

投資関数の図示



含意：金融政策で r が下がると、投資が増える。

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

$I = I(r)$ は単純だけど次のような問題点：ミクロ的基礎の欠如

- ▶ ミクロ経済学で学んでいるような，企業の目的や制約が記述されていない
 - ▶ 拡張可能性
 - ▶ 例：「投資減税に企業がどう反応するか？」のような分析には不向き
- ⇒ 企業の目的と制約を記述して，投資関数を導く

生産技術

投資

日野将志

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

生産とは、労働 H と資本 K を使って、製品 Y を作ること。

数学的には「労働と資本を投入して、製品が生まれる」ような関数 F

$$Y = F(K, H)$$

F を生産関数と呼ぶ

- ▶ 生産関数は $F_K > 0, F_H > 0$ かつ $F_{KK} < 0, F_{HH} < 0$ が一般的な仮定
- ▶ 一次同次とすることが多い。 $n \in \mathbb{N}$ 次同次とは、パラメータ $\lambda > 0$ に対して、

$$\lambda^n F(K, H) = F(\lambda K, \lambda H)$$

が成り立つこと (\mathbb{N} は自然数の集合)

- ▶ 1 次同次の意味：投入量を λ 倍すれば、生産量も λ 倍になる
- ▶ 例：畑 (K) と農夫 (H) を 2 倍にすれば、農作物 (Y) は 2 倍に
- ▶ 生産関数の代表例：
 - ▶ コブ・ダグラス型： $F(K, H) = K^\alpha H^{1-\alpha}$

生産とは、労働 H と資本 K を使って、製品 Y を作ること。

数学的には「労働と資本を投入して、製品が生まれる」ような関数 F

$$Y = F(K, H)$$

F を生産関数と呼ぶ

- ▶ 生産関数は $F_K > 0, F_H > 0$ かつ $F_{KK} < 0, F_{HH} < 0$ が一般的な仮定
- ▶ 一次同次とすることが多い。 $n \in \mathbb{N}$ 次同次とは、パラメータ $\lambda > 0$ に対して、

$$\lambda^n F(K, H) = F(\lambda K, \lambda H)$$

が成り立つこと (\mathbb{N} は自然数の集合)

- ▶ 1 次同次の意味：投入量を λ 倍すれば、生産量も λ 倍になる
- ▶ 例：畑 (K) と農夫 (H) を 2 倍にすれば、農作物 (Y) は 2 倍に
- ▶ 生産関数の代表例：
 - ▶ コブ・ダグラス型： $F(K, H) = K^\alpha H^{1-\alpha}$

生産とは、労働 H と資本 K を使って、製品 Y を作ること。

数学的には「労働と資本を投入して、製品が生まれる」ような関数 F

$$Y = F(K, H)$$

F を生産関数と呼ぶ

- ▶ 生産関数は $F_K > 0, F_H > 0$ かつ $F_{KK} < 0, F_{HH} < 0$ が一般的な仮定
- ▶ 一次同次とすることが多い。 $n \in \mathbb{N}$ 次同次とは、パラメータ $\lambda > 0$ に対して、

$$\lambda^n F(K, H) = F(\lambda K, \lambda H)$$

が成り立つこと (\mathbb{N} は自然数の集合)

- ▶ 1 次同次の意味：投入量を λ 倍すれば、生産量も λ 倍になる
- ▶ 例：畑 (K) と農夫 (H) を 2 倍にすれば、農作物 (Y) は 2 倍に
- ▶ 生産関数の代表例：
 - ▶ コブ・ダグラス型： $F(K, H) = K^\alpha H^{1-\alpha}$

コブ・ダグラス型

コブ・ダグラス型が一番頻繁に使われる

$$F(K, H) = K^\alpha H^{1-\alpha}$$

▶ 頻繁に使われる背景

- ▶ 現実には、「労働所得分配率 (wH/Y) が一定」だった
- ▶ コブ・ダグラス型場合、労働所得分配率が一定になる

$$\frac{wH}{Y} = 1 - \alpha$$

(この導出は練習問題)

他の生産関数

- ▶ CES 型： $F(K, H) = [\alpha K^\epsilon + (1 - \alpha)H^\epsilon]^{1/\epsilon}$
- ▶ レオンチェフ型： $F(K, H) = \min\{\alpha K, (1 - \alpha)H\}$

コブ・ダグラス型

コブ・ダグラス型が一番頻繁に使われる

$$F(K, H) = K^\alpha H^{1-\alpha}$$

▶ 頻繁に使われる背景

- ▶ 現実には、「労働所得分配率 (wH/Y) が一定」だった
- ▶ コブ・ダグラス型場合、労働所得分配率が一定になる

$$\frac{wH}{Y} = 1 - \alpha$$

(この導出は練習問題)

他の生産関数

- ▶ **CES 型**： $F(K, H) = [\alpha K^\epsilon + (1 - \alpha)H^\epsilon]^{1/\epsilon}$
- ▶ **レオンチェフ型**： $F(K, H) = \min\{\alpha K, (1 - \alpha)H\}$

最も単純な投資

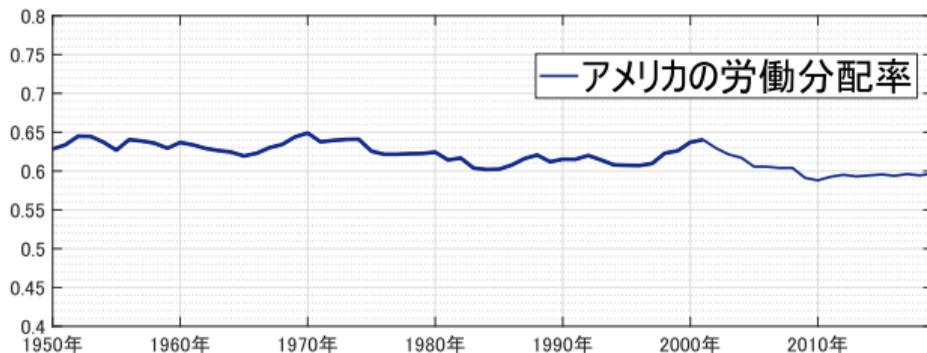
生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

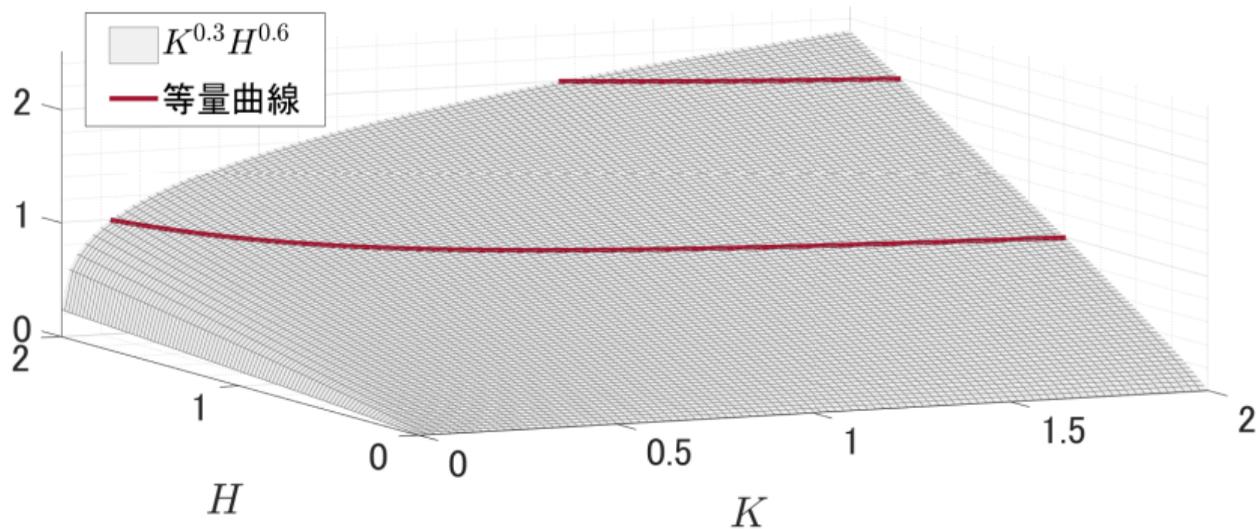


ざっくり見ると、概ね安定して 0.6 – 0.64 程度 ⇒ コブ・ダグラス型で OK そう

細かい論点：

- ▶ ズームして見ると、労働所得分配率は下降傾向
- ▶ 含意：労働者に回される割合が減っている。格差の一つの要因？

図：生産関数



投資

日野将志

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

静学的な企業を選択

投資

日野将志

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

計算例： K^α

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

まず静学的な場合から始める. 企業は次のようなことを考えるとする

- ▶ 家計から, 労働を雇い、資本を借りるとする
 - ▶ 労働には労働所得 wH を支払う
 - ▶ 資本には賃料 rK を支払う
 - ▶ 資本は生産に使うことで減耗する (δK)
- ▶ 労働と資本を使って生産を行う
- ▶ 利潤は生産物から労働所得と資本の賃料, 資本の減耗費用を引いたもの

$$\pi = \max_{K, H} F(K, H) - wH - rK - \delta K$$

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

計算例: K^α

2 期間問題: 投資

トービンの Q 理論: 調整費用の無い場合

補足: トービンの Q と凸型調整費用

- ▶ 企業は, 利潤を最大化するように, 資本と労働を選択する
- ▶ 価格 (r, w) は所与 (\Leftrightarrow 企業は選べない)

企業の利潤最大化は以下のとおり

$$\max_{K, H} F(K, H) - wH - rK - \delta K$$

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

計算例: K^α

2 期間問題: 投資

トービンの Q 理論: 調整費用の無い場合

補足: トービンの Q と凸型調整費用

K, H についてそれぞれ微分して 0 を求める

$$K : F_K(K, H) = r + \delta$$

$$H : F_H(K, H) = w$$

この式を覚えていて欲しい.

▶ 次に見せること: 動学的なモデルを考えても, 結局この形になる (2 期間)

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

計算例: K^α

2 期間問題: 投資

トービンの Q 理論: 調整費用の無い場合

補足: トービンの Q と凸型調整費用

先ほどの一階の条件の 2 式を割ると,

$$\underbrace{\frac{F_K(K, H)}{F_H(K, H)}}_{= \text{等量曲線の傾き}} = \underbrace{\frac{r + \delta}{w}}_{= \text{価格比}}$$

家計の場合 (復習)

$$\underbrace{\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)}}_{= \text{無差別曲線の傾き}} = \underbrace{(1 + r)}_{= \text{価格比}}$$

最も単純な投資

生産技術

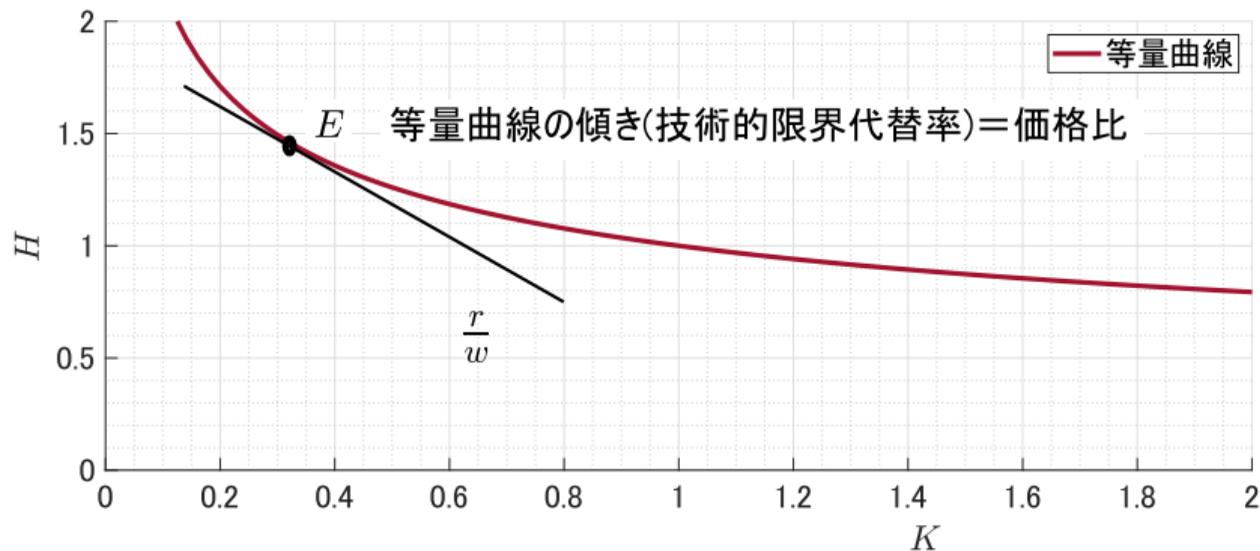
静学的な企業

計算例: K^α

2 期間問題: 投資

トービンの Q 理論: 調整費用の無い場合

補足: トービンの Q と凸型調整費用



等量曲線の傾きを技術的限界代替率とも呼ぶ

計算例: $F(K) = K^\alpha$

- ▶ 本来本節でやりたいことは、資本形成が利子率にどのように反応するか見ること
- ▶ 一方, $F(K, H)$ という一般形のままでと, 投資関数を導けない
⇒ $F(K, H)$ を簡単な関数形を設定して解いてみる

仮に, 単純化のために労働投入は捨象して,

$$F(K, H) = F(K) = K^\alpha$$

としてみる. $\alpha \in (0, 1)$ とする.

計算例: $F(K) = K^\alpha$

- ▶ 本来本節でやりたいことは、資本形成が利子率にどのように反応するか見ること
- ▶ 一方, $F(K, H)$ という一般形のままでと, 投資関数を導けない
⇒ $F(K, H)$ を簡単な関数形を設定して解いてみる

仮に, 単純化のために労働投入は捨象して,

$$F(K, H) = F(K) = K^\alpha$$

としてみる. $\alpha \in (0, 1)$ とする.

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

計算例: K^α

2 期間問題: 投資

トービンの Q 理論: 調整費用の無い場合

補足: トービンの Q と凸型調整費用

さらに単純化のために $\delta = 0$ とする. このときの利潤最大化問題は,

$$\max_K K^\alpha - rK$$

である. これの微分して 0 は,

$$\alpha K^{\alpha-1} = r$$

$$\Rightarrow K = \left(\frac{\alpha}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

最も単純な投資

生産技術

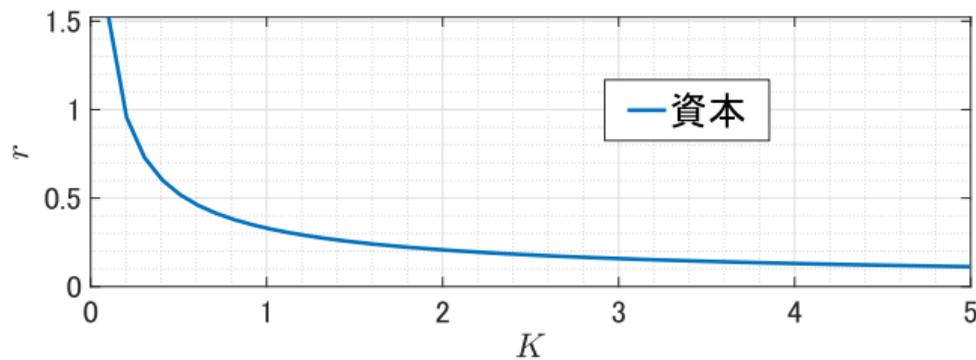
静学的な企業

計算例: K^α

2 期間問題: 投資

トービンの Q 理論: 調整費用の無い場合

補足: トービンの Q と凸型調整費用



資本は利子率の減少関数

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

計算例: K^α

2 期間問題: 投資

トービンの Q 理論: 調整費用の無い場合

補足: トービンの Q と凸型調整費用

- ▶ 今, 導出したのは $K(r)$.
- ▶ 本来分析したものは $I(r)$

一方, 投資は本来

$$I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$$

と定義される. 投資を議論するためには時間と言う概念が不可欠!

⇒ 二期間モデルへ

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

2 期間問題：投資の決定

静学的な企業の場合では、企業は資本を借りていると仮定した

- ▶ そのため、賃料 rK を払っていた

次に、企業が資本を保有すると考える。

- ▶ 企業は投資 I をすることで、今期費用を払い、来期の資本を増やすことが出来る
- ▶ 仮定：企業は K_1 を既に保有しているところから操業を始める
 - ▶ K_1 は変更できない

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：
調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

▶ 今期の利潤

$$\pi_1 = F(K_1, H_1) - wH_1 - \underbrace{I}_{\text{投資}}$$

$$\text{where } I = K_2 - (1 - \delta)K_1$$

▶ 来期の利潤

$$\pi_2 = F(K_2, H_2) - wH_2 + \underbrace{(1 - \delta)K_2}_{\text{=資本の残存価値}}$$

企業の目的関数

投資

日野将志

企業は次のように割引現在価値の利潤を最大化するとする。

$$V \equiv \max \pi_1 + \frac{1}{1+r} \pi_2$$

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

そして π_1 と π_2 はそれぞれ次のように決まる (再掲)

▶ 今期の利潤

$$\pi_1 = F(K_1, H_1) - wH_1 - I$$

$$\text{where } I = K_2 - (1 - \delta)K_1$$

▶ 来期の利潤

$$\pi_2 = F(K_2, H_2) - wH_2 + \underbrace{(1 - \delta)K_2}_{= \text{資本の残存価値}}$$

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

企業の二期間の最大化をまとめると次の通り

$$\begin{aligned} \max_{I, K_2, H_1, H_2} & F(K_1, H_1) - wH_1 - I + \frac{1}{1+r} [F(K_2, H_2) - wH_2 + (1-\delta)K_2] \\ \text{s.t.} & I = K_2 - (1-\delta)K_1 \end{aligned}$$

- ▶ \max の下に K_1 が無いことに注意
 - ▶ K_1 は期首の時点で持ってる．変更できない
- ▶ 企業の割引因子は $1/(1+r)$ とする

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

2 期間の利潤最大化を解く

投資の定義式を目的関数に代入すると、

$$\begin{aligned} \max_{K_2, H_1, H_2} & F(K_1, H_1) - wH_1 - [K_2 - (1 - \delta)K_1] \\ & + \frac{1}{1 + r} [F(K_2, H_2) - wH_2 + (1 - \delta)K_2] \end{aligned}$$

となる。それぞれ微分を取って、導関数 = 0 を解くと以下を得る。

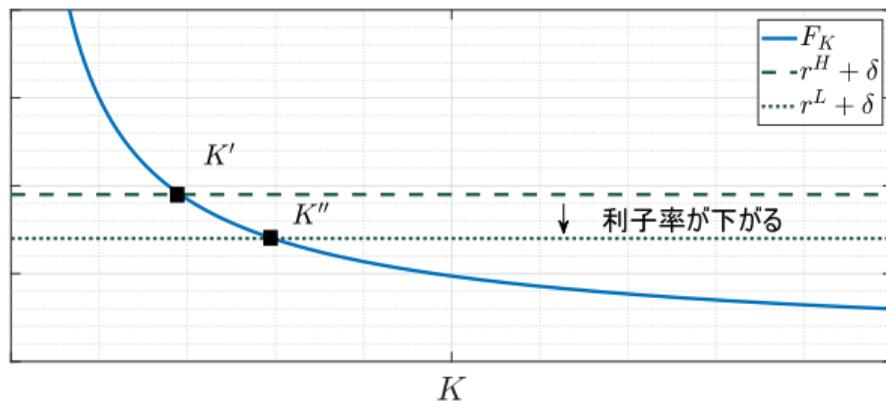
$$K_2 : F_K(K_2, H_2) = r + \delta$$

$$H_1 : F_H(K_1, H_1) = w$$

$$H_2 : F_H(K_2, H_2) = w$$

静学的な場合 (**静学的**) と同じ！ \Rightarrow 多くの場合で静学的なモデルを使う

利率の変化と投資 (図示)



利率が下がると、資本 K_2 (したがって投資 I) が上がる ($K' \rightarrow K''$)

応用例

- ▶ 中央銀行が r を下げると、投資が活発になる

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

投資理論のメッセージ

- ▶ 「 $F_K = r + \delta$ で投資が決まる」
- ▶ 問題点： F_K は観察できない

もう少し、観察できるような指標はないだろうか？

- ▶ \Rightarrow トービンの Q 理論
 - ▶ 資本の増加が、費用以上に企業価値を増やすかどうかが大重要

$$\frac{d(\text{企業価値})}{\underbrace{d(\text{保有する資本の価値})}_{\text{トービンの } q \text{ (限界 } q)}} \geq 1 \quad (= \text{ここでの資本の価格})$$

で企業が投資するかどうか決める

トービンのQ理論の概要

投資

日野将志

各期の**企業価値**は利潤の割引現在価値の総和

企業の価値 $V(K_1)$, $V(K_2)$

$$V(K_1) \equiv \max \pi_1 + \frac{1}{1+r} \pi_2$$

$$V(K_2) \equiv \max \pi_2$$

各期の企業価値が資本の関数になる理由：期首において K_t は所与だから。

次のように変数 q と Q (トービンの限界 q , トービンの平均 Q) を定義する。

$$q \equiv \frac{1}{1+r} \frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2}, \quad Q \equiv \frac{1}{1+r} \frac{V(K_2)}{K_2}$$

$q > 1$ は「資本が増えると企業価値がコスト以上に増える」ことを意味している

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

トービンのQ理論の概要

投資

日野将志

各期の**企業価値**は利潤の割引現在価値の総和

企業の価値 $V(K_1)$, $V(K_2)$

$$V(K_1) \equiv \max \pi_1 + \frac{1}{1+r} \pi_2$$

$$V(K_2) \equiv \max \pi_2$$

各期の企業価値が資本の関数になる理由：期首において K_t は所与だから。

次のように変数 q と Q (トービンの**限界 q** , **トービンの平均 Q**) を定義する。

$$q \equiv \frac{1}{1+r} \frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2}, \quad Q \equiv \frac{1}{1+r} \frac{V(K_2)}{K_2}$$

$q > 1$ は「資本が増えると企業価値がコスト以上に増える」ことを意味している

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

トービンのQ：限界 q と平均 Q

- ▶ $q > 1$ は「資本が増えると企業価値がコスト以上に増える」ことを意味している
 - ▶ $q > 1$ ならば投資すべき
- ▶ $q < 1$ は「資本を増やしても、コストの方が企業価値の増加より大きい」ことを意味している
 - ▶ $q < 1$ ならば投資は控えるべき（むしろ資本を売却してもよい）

⇒ トービンの限界 q は投資判断に役に立つ！

問題点：でもやっぱり、トービンの限界 Q は観察できない…。 ⇒ 平均 Q は観察できる

2 期間モデル再び

投資

日野将志

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

$$V(K_1) = \max_{I, K_2, H_1, H_2} F(K_1, H_1) - wH_1 - I + \frac{1}{1+r} \underbrace{[F(K_2, H_2) - wH_2 + (1-\delta)K_2]}_{=V(K_2)}$$

s.t. $I = K_2 - (1-\delta)K_1$

一階の条件は、次の通り

$$K_2 : \frac{1}{1+r} \frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2} = 1$$

$$H_1 : F_H(K_1, H_1) = w$$

$$H_2 : F_H(K_2, H_2) = w$$

$$\Rightarrow q = 1$$

(※もう少し計算すると、 $q = Q$ となることも分かる。 補足)

理論が言っている事：

- ▶ $q = Q$. 平均 Q だけを見れば, 限界 q も分かる!
- ▶ $Q \geq 1$ が投資の符号を決定する
 - ▶ $Q > 1$: 企業価値 V を投資によって高められる. したがって投資すべき
 - ▶ $Q < 1$: 企業価値 V は投資をすると下がる. したがって投資は控えるべき
- ▶ マイナーコメント: この分野は Hayashi 先生や, Yoshikawa 先生が活躍した古典

実証: 回帰式 (Tobin's Q-regression)

$$\frac{I}{K} = \alpha + \beta Q + \epsilon$$

意味「投資の決定がトービンの平均 Q だけで決まっているか」

(※被説明変数を I ではなく, I/K とする理由は補足もしくは練習問題参照)

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題: 投資

トービンの Q 理論: 調整費用の無い場合補足: トービンの Q と凸型調整費用

実証：古典的な Q-regression (con'd)

投資

日野将志

Andrei, Mann and Moyen(2019)

- ▶ 1995 年まで：Q 理論は的外れ
- ▶ 1995 年以降：Q 理論は割と正しい

最も単純な投資

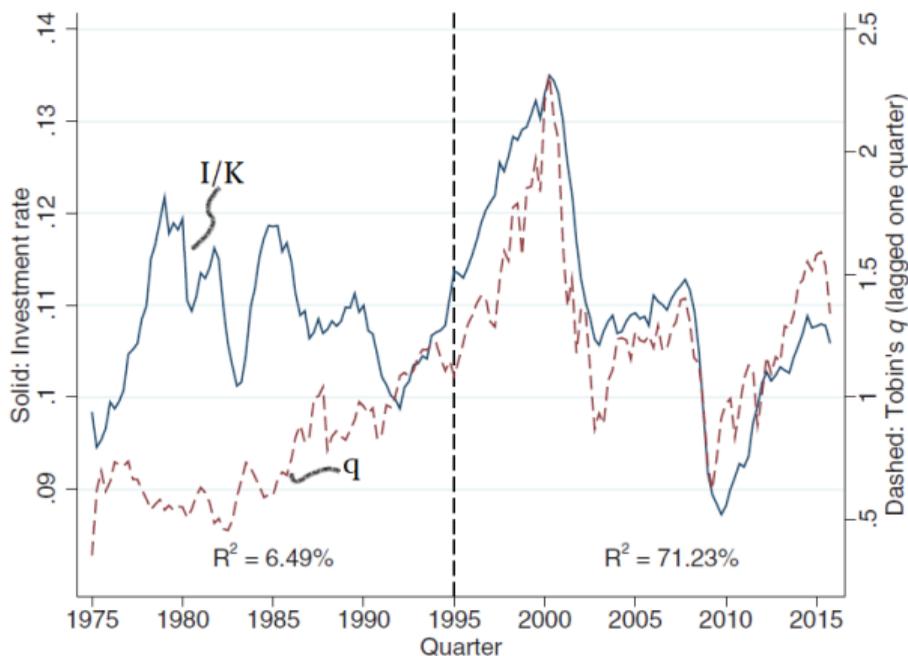
生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用



- ▶ 「 $q \geq 1$ が投資の符号を決定する」という条件は、学部だけで教えられており、あまり大学院以降では出てこなくなる
 - ▶ 理由：伝統的には、Q理論は「実証的に的外れ」という風潮だった
 - ▶ 例：Adda and Cooper (2003)
 - ▶ 大学院では、むしろ、「 Q^M が投資 I を決定するための十分な情報量になる」ということを教える。
 - ▶ 一応、このスライドの補足でも、そういう解説を付けているので、興味がある人は読んでみてください

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

- ▶ 投資とは資本の購入 (または売却)
- ▶ 静学的なモデルでも、動学的なモデルでも (基本的なケースでは) 同じになる.

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

補足：トービンの Q 理論と凸型調整費用

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

注意：この補足は他の補足よりも難しいかもしれません。大学院進学に関心がある人のみ読むと良いかもしれません。

トービンの Q 理論の概要 (続)

投資

日野将志

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

前節で q が投資の決定において重要なことは分かった。

▶ 問題点：限界的な概念は実証的に観察がほぼ不可能。

▶ 限界トービンの q は、仮に 1 単位資本が増えたら、企業価値が増えるかどうか

Abel(1979) や Hayashi(1982) は、『特定の条件の下で、投資を判断するうえで平均的な指標 Q さえ見れば良い』ことを示した。

$$Q \equiv \frac{1}{1+r} \frac{V(K)}{K}$$

特定の条件 (および前節の拡張)

▶ 条件：生産関数が 1 次同次

▶ 拡張：一次同次の調整費用関数 $\Phi(K_1, I)$ と資本の購入価格 p

トービンのQ理論：モデル

2期間モデルの拡張として、次のように、投資をするためには調整費用 $\Phi(K_1, K_2)$ がかかるとする。

$$\pi_1 = F(K_1, H_1) - wH_1 - pI - \Phi(K_1, I)$$

$$\text{where } I = K_2 - (1 - \delta)K_1$$

$$\Phi_2(K_1, I) > 0, \quad \Phi_{22}(K_1, I) < 0,$$

$\Phi(\cdot)$ は一次同次関数

調整費用の意味

- ▶ 投資 $I \neq 0$ をすると、費用 Φ を払わなければならない
 - ▶ 資本を買うにも、売るにも費用がかかる
- ▶ 代表的な関数形の例：

$$\Phi(K_1, I) = \frac{\phi}{2} \left(\frac{I}{K_1} \right)^2 K_1 = \frac{\phi}{2} \left(\frac{K_2 - (1 - \delta)K_1}{K_1} \right)^2 K_1$$

$$\begin{aligned}
 V(K_1) = \max_{K_2, H_1, H_2} & F(K_1, H_1) - wH_1 - p[K_2 - (1 - \delta)K_1] - \Phi(K_1, I) \\
 & + \frac{1}{1 + r} \underbrace{[F(K_2, H_2) - wH_2 + (1 - \delta)K_2]}_{V(K_2)}
 \end{aligned}$$

この一階の条件は,

$$K_2 : \frac{1}{1 + r} \underbrace{[F_K(K_2, H_2) + (1 - \delta)]}_{= \frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2}} = p + \Phi_2(K_1, I) \quad (1)$$

$$H_1 : F_H(K_1, H_1) = w$$

$$H_2 : F_H(K_2, H_2) = w$$

計算手順 (1)：労働の整理

補題

ある微分可能な関数 $F(x)$ が n 次同次のとき、導関数 $F_x(x)$ は $n - 1$ 次同次になる (証明は 50)

この補題を使うと、 $F_H(K_t, H_t)$ は 0 次同次であることが分かる。したがって、次のことが成り立つ。

$$w = F_H(K_t, H_t) = F_H(K_t/H_t, 1) \quad (\text{両方の要素を } H_t \text{ で割っている})$$

次に、 F_H は単調 (減少) 関数なので、逆関数が取れる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{K_t}{H_t} &= F_H^{-1}(w, 1) \equiv \hat{F} \\ \Rightarrow K_t &= \hat{F} H_t \end{aligned}$$

このように K は H の線形関数であることが分かる。

(コメント：これは静学的な労働の問題だけ先に解いてるのと同じ)

計算手順 (2) : K だけの問題の定義

前頁の結果より, H_t を K_t に置き換えて最適化問題を定義できる.

$$V(K_1) = \max_{K_2} F(K_1, K_1 \hat{F}^{-1}) - wK_1 \hat{F}^{-1} - p[K_2 - (1 - \delta)K_1] - \Phi(K_1, I) \\ + \frac{1}{1+r} \underbrace{[F(K_2, K_2 \hat{F}^{-1}) - wK_2 \hat{F}^{-1} + (1 - \delta)K_2]}_{=V(K_2)}$$

さらにこれは生産関数の一次同次性より,

$$V(K_1) = \max_{K_2} F(1, \hat{F}^{-1})K_1 - wK_1 \hat{F}^{-1} - p[K_2 - (1 - \delta)K_1] - \Phi(K_1, I) \\ + \frac{1}{1+r} \underbrace{[F(1, \hat{F}^{-1})K_2 - wK_2 \hat{F}^{-1} + (1 - \delta)K_2]}_{=V(K_2)=\hat{v}K_2}$$

と出来る. $V(K_2)$ が K_2 の線形関数となっていることが分かる.

$V(K_2)$ が K_2 の線形関数 $\hat{v}K_2$ と表せることが分かった。したがって、

$$q \equiv \frac{1}{1+r} \frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2} = \frac{1}{1+r} \hat{v} = \frac{1}{1+r} \frac{V(K_2)}{K_2} \equiv Q$$

となることが分かる。

したがって、生産関数と調整費用が一次同次のとき、 q が測定できずとも、 Q をその代理変数 (proxy) として測定すれば十分であることを示している。

(コメント：なお $V(K_1)$ が K_1 の線形関数になることも示すことが出来る。特に、無限期間の時には、 $V(K_1)$ の線形性も示すことが必要になる。が、今は必要ないので割愛。)

トービンの回帰式について

投資

日野将志

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：
調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

$q = Q$ を用いて (1) 式を再掲する。そして、再度、ゼロ次同次を使うと、次のように出来る。

$$\begin{aligned}Q &= p + \Phi_2(K_1, I) \\ \Rightarrow Q &= p + \Phi_2(1, I/K_1) \\ \Rightarrow \frac{I}{K_1} &= \hat{\Phi}_2^{-1}(Q - p)\end{aligned}$$

ここで $\hat{\Phi}_2(I/K_1) \equiv \Phi_2(1, I/K_1)$ である。

この式は回帰式の形になっている。

$F(x_1, x_2)$ が n 次同次なので、定義より次を満たす.

$$\lambda^n F(x_1, x_2) = F(\lambda x_1, \lambda x_2), \quad \forall x_1, x_2, \& \lambda > 0$$

したがって左辺と右辺の偏導関数は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda^n F(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= \lambda^n F_1(x_1, x_2) \\ \frac{\partial \lambda F(\lambda x_1, \lambda x_2)}{\partial x_1} &= \lambda F_1(\lambda x_1, \lambda x_2) \end{aligned}$$

この左辺と右辺は常に等しいので,

$$\begin{aligned} \lambda^n F_1(x_1, x_2) &= \lambda F_1(\lambda x_1, \lambda x_2) \\ \Rightarrow \lambda^{n-1} F_1(x_1, x_2) &= F_1(\lambda x_1, \lambda x_2) \end{aligned}$$

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用