基礎マクロ練習問題：企業投資

日野将志 *

1 生産技術

1.1 一次同次

以下の生産関数が一次同次かどうか答えよ．なお，一次同次ならば一次同次であることを示し，そうでないならば、そうでないことも示すこと．

何も言及しなければ，パラメータは正とする．

- $F(K) = \alpha K$
- $F(K,H) = \alpha K + (1-\alpha)H$．なお，$\alpha \in (0,1)$ とする
- $F(K,H) = \alpha K + \beta H$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
- $F(K,H) = K^{\alpha} H^{1-\alpha}$．なお，$\alpha \in (0,1)$ とする
- $F(K,H) = K^{\alpha} H^{\beta}$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
- $F(K,H) = [\alpha K^{\epsilon} + (1-\alpha)H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$．なお，$\alpha \in (0,1)$ とする
- $F(K,H) = [\alpha K^{\epsilon} + \beta H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
- $F(K,H) = \min\{\alpha K, (1-\alpha)H\}$．なお，$\alpha \in (0,1)$ とする
- $F(K,H) = \min\{\alpha K, \beta H\}$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする

---

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

2　静学的な企業の選択

2.1　生産要素 1 つの場合

授業では，資本と労働の二つが生産に必要なケースとして導入した．一方，ここでは労働だけが生産要素として必要なケースを考えてみよう．例えば,

$$F(K,H)=F(H)=H^\alpha$$

を考えてみる．$\alpha\in(0,1)$ とする．

この労働には，賃金支払い wH を行う必要があるとする．

このとき,

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な H を求めよ．

2.2　生産要素 2 つの場合

2.2.1　曲率のある和

$$F(K,H)=F(H)=K^\alpha+H^\beta$$

を考えてみる．$\alpha\in(0,1)$ かつ $\beta\in(0,1)$ とする．

この労働には，賃金支払い wH と利子支払い rK を行う必要があるとする．一方，資本減耗率 δ はゼロとする．

このとき,

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な (K,H) を求めよ．

2.2.2　コブ・ダグラス

$$F(K,H)=K^\alpha H^\beta$$

を考えてみる．$\alpha+\beta\neq 1$ とする．

この労働には，賃金支払い wH と利子支払い rK を行う必要があるとする．一方，資本減耗率 δ はゼロとする．

このとき,

- 最大化問題を書いてみよ．

- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な (K, H) を求めよ．
- $Y = F(K, H)$ と生産量 Y を定義する．このとき，rK/Y および wH/Y を求めよ．
- K/H の比について議論せよ．例えば $r = w$ のときどうなるだろう．
- 仮に，$\beta = 1 - \alpha$ のときにどうなるか，1，2 行で議論せよ．

2.2.3　CES 関数

$$F(K, H) = [\alpha K^{\epsilon} + \beta H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$$

を考えてみる．$(\alpha, \beta) \in (0, 1)$ かつ $\epsilon \in (-\infty, 1)$ とする．

この労働には，賃金支払い wH と利子支払い rK を行う必要があるとする．一方，資本減耗率 δ はゼロとする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- この生産関数は CES(constant elasticity substitution) 関数と呼ばれる関数形である．この特徴は，代替の弾力性 (elasticity of substitution) が一定 (constant) であることである．次の代替の弾力性

$$\hat{\epsilon} \equiv \frac{\frac{d(K/H)}{(K/H)}}{\frac{d(F_H(K,H)/F_K(K,H))}{F_H(K/H)/F_K(K/H)}} = \frac{\frac{d(K/H)}{d(F_H(K,H)/F_K(K,H))}}{\frac{K/H}{F_H(K/H)/F_K(K/H)}}$$

  を計算してみよ．
- 限界代替率 = 価格比の式を求め，次のケースを比較せよ．
  - CES 関数かつ $\epsilon \to 0$ のときの限界代替率と，コブ・ダグラスのときを比較せよ
  - CES 関数かつ $\epsilon \to 1$ のときの限界代替率と，線形 $(F(K, H) = K + H)$ のときを比較せよ

3　2 期間問題

3.1　生産要素 1 つの場合

授業では，資本と労働の二つが生産に必要なケースとして導入した．一方，ここでは資本だけが生産要素として必要なケースを考えてみよう．例えば，生産関数が

$$F(K_t) = K_t^\alpha$$

という場合を考えてみる．$\alpha \in (0, 1)$ とする．また $K_1 > 0$ は企業にとって所与とする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な K_2 を求めよ．

3.2　生産要素が 1 つの場合：2 次の調整費用

前の問題 (つまり $F(K_t) = K_t^\alpha$) に加えて，次のような 2 次関数の調整費用 $\Phi(K_1, K_2)$ がある場合を考えてみよう．

$$\Phi(K_1, K_2) = \frac{\phi}{2}\left(\frac{K_2 - (1-\delta)K_1}{K_1}\right)^2 K_1 = \frac{\phi}{2}\left(\frac{I}{K_1}\right)^2 K_1$$

ここで $\phi > 0$ とする．この調整費用の意味は，$I \neq 0$ という (負を含む) 投資をするには企業は費用 $\Phi(\cdot)$ を支払う必要があることを意味している．また，前問と同様に $K_1 > 0$ は企業にとって所与とする．

- この調整費用関数が K_1 と K_2 に対して一次同次であることを確認せよ．
- $I > 0$ のとき，この調整費用関数が $\Phi_2(\cdot) > 0$ かつ $\Phi_{22}(\cdot) > 0$ であることを示せ．
- この調整費用関数があるときの最大化問題を書いてみよ
  - ヒント：スライドの補足を参考にすると良い
- 最大化問題の一階条件を書いてみよ．
- この一階条件を調整費用がない場合 ($\phi = 0$ の場合) と比べて，どのように解が異なるか比べてみよ．

3.3　曲率のある線形和

$$F(K, H) = F(H) = K^\alpha + H^\alpha$$

を考えてみる．$\alpha \in (0, 1)$ とする．調整費用はないとする．また $\delta = 0$ とする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．

- 最適な (K_2, H_1, H_2) を求めよ．
- 最適な解を 2.2.1 の問題と比較せよ

3.4　3 期間問題

3.5　生産要素 1 つの場合

次に 3 期間あるとする．ここでは資本だけが生産要素として必要なケースを考えてみよう．例えば，生産関数が

$$F(K_t) = K_t^{\alpha}$$

という場合を考えてみる．$\alpha \in (0,1)$ とする．また $K_1 > 0$ は企業にとって所与とする．また $\delta = 0$ としよう．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な K_2 を求めよ．

4　トービンの Q

4.1　トービンの Q：資本のみの場合

企業は期首に K の資本を持っているとする．この資本は減耗しないとする (つまり $\delta = 0$)．企業は投資 I をすることで資本 K よりも資本の量を増やすことが出来る．この資本を用いて企業は生産を行い，生産物に Q の価格を付けて販売できる．投資 I をする価格は 1 とする．さらに，企業が投資 I をするには，調整費用 $C(I)$ がかかるとする．この企業の最大化問題として次の問題を考えよう．

$$\max_I Q(K+I) - I - C(I)$$

なお，ここで $Q(K+I)$ は企業の資産の市場価値とも解釈できる．

このとき，次の問に答えよ

- $C(I) = 0$ とする．企業の最大化問題を解き，Q がどのような時に投資をするか答えよ (ヒント：微分を使わないこと)
- $C(I) = \frac{c}{2}\frac{I^2}{K}$ とする．ここで $c > 0$ はパラメータである．すなわち，企業は投資 I をすることで費用がかかる場合を考える．このとき，企業の最大化問題を解き，Q がどのような時に投資をするか答えよ．

5 発展：企業金融 (難しい)

5.1 Equity Finance: 株式発行による資金調達

企業の最大化問題を

$$\max_{k_2} \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2$$
$$\pi_1 = z_1 k_1^\alpha + (1-\delta)k_1 - k_2$$
$$\pi_2 = z_2 k_2^\alpha + (1-\delta)k_2$$

とする．なお，$\alpha \in (0,1]$ とする．

1. 最適な資本のもとでの利潤 π_1, π_2 を求めよ
2. もし π_1 と π_2 の符号が変わるような条件を求めよ．

5.2 Corporate Bond：社債が追加されたケース

企業の最大化問題を

$$\max_{k_2} \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2$$
$$\pi_1 = z_1 k_1^\alpha + (1-\delta)k_1 - k_2 + b$$
$$\pi_2 = z_2 k_2^\alpha + (1-\delta)k_2 - (1+(1-\tau)r)b$$

とする．引き続き，$\alpha \in (0,1]$ とする．b は社債である．つまり，$b > 0$ のときは，企業は社債を発行して資金調達していることを意味する．また τ は利子所得税である．

1. $\tau = 0$ とする．このとき b の範囲を考えよ．さらに，b と π_1 の関係を議論せよ．
2. $\tau > 0$ とする．このとき b の範囲を考えよ．同様に，b と π_1 の関係を議論せよ．

6　発展：非可逆性 (とても難しい)

背景：これまで資本の購入と売却は同じ価格であり，資本の価格は 1 と暗黙に仮定してきた．しかし，現実には資本の購入価格と売却価格は異なる．例えば，トヨタが車の生産のために使っている資本 (工場や機械) をパナソニックに売却することを想像してみよう．この場合，家電メーカーであり車を生産しないパナソニックからすれば，車を製造するための資本はほとんど再利用不可能な資本であり，ほとんど価値がないだろう．仮にこれがトヨタが 100 億円かけて作った工場だったとしても，パナソニックにとっては 20 億円程度の価値しかないかもしれない

このように，そもそも企業の資本は売却が難しく，売却できたとしても割安になってしまうことが想像できる．このような結果，企業の資本の売却価格は購入価格よりも低いことが一般的である．

このような現実をモデルを使って反映するために，次のような制約を考えよう．

$$\begin{cases} I & \text{if } I \geq 0 \\ qI & \text{if } I < 0 \end{cases}$$

ここで $q \in [0,1)$ はパラメータである．これは，正の投資をする (つまり資本を購入する) ときは，今まで通り，価格 1 で資本を購入できるが，負の投資をする (つまり資本を売却する) ときは，低い価格 q でしか売却できないことを意味している．このような制約を投資の**非可逆性** (irreversibility) と呼ぶ[*1]．

この制約を問題 3.1 に追加して解いてみることを考えよう．つまり，企業は 2 期間操業し，生産関数は $F(K) = K^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ であり，$K_1 > 0$ は所与である．

このように正負の投資に応じて制約式が異なることになる．そのため最大化問題を定式化するためには，まず正の投資をするときと負の投資をするときで場合分けした最大化問題を定式化する必要がある．そして，それぞれの解を用いて，総合的に正の投資をすべきか負の投資をすべきか比較することになる．

このような作業を，次の問題の指示に従って行ってみよ．

1. 正の投資をするときと，負の投資をするときの最大化問題をそれぞれ書いてみよ．それぞれのときの生涯利潤の割引現在価値を $V^u(K_1)$ と $V^d(K_1)$ と定義せよ[*2]．そして，$V^u(K_1)$ と $V^d(K_1)$ を比較し，望ましい方を選ぶという式も書いてみよ．
2. 正の投資の最大化問題と負の投資の最大化問題をそれぞれ解いて，それぞれの場合の最適な K_2 を求めよ．なお，不等式制約の解き方は次のようにすればよい．
   - 一旦，不等式制約を無視して解いてみる．このときの解を，正の投資のときは $\bar{k}^*$，負の投資のときは $\underline{k}^*$ と定義せよ
   - そのあとで，不等式制約が関係するかどうかを確認する
3. $\bar{k}^*$ と $\underline{k}^*$ の大小関係を比較せよ
4. $\bar{k}^*$ と $\underline{k}^*$ を閾値として利用して，K_1 がそれぞれどのような条件を満たすときに，最適な K_2 がどのように決まるか議論・整理せよ．
5. $q = 1$ のときどうなるか．また左側から q が 1 に近づく，つまり，$q < 1$ から始まって $q \nearrow 1$ となるときどうなるか．

[*1] 非可逆とは，費用なしには元に戻せないといった意味である．
[*2] V^u は the Value of the firm when Upward investing から来てると思うと，記法が覚えやすいかもしれない．

7 (発展) 家計の耐久財消費

家計の問題を考える．家計消費の章で考えていた消費 c_t は，t 期中に消費し切ってしまうようなものであった．つまり，食料のように一回購入し，使ってしまうと，なくなってしまうような財を考えていた．このような消費は厳密には非耐久消費財 (nondurable goods) と呼ぶ．一方，例えば車や家具，家電などは，一度購入するとその後も長期間使うことができる．このような財を**耐久消費財** (durable goods) と呼ぶ．耐久消費財は，長期間使うことができる点からも，企業の資本と似たような性質を持つ．そのことを学ぶのが，この問題の目的である．

ここでは，家計問題に耐久消費財を導入することを考えよう．2 期間モデルを考える．耐久財は δ の割合で減耗するとする．家計は 1 期目に，y_1 という所得をもち，それを非耐久財消費 c_1 か耐久財の購入 d_1 か貯蓄 s に使う．2 期目は，所得 y_2 と利子所得 $(1+r)s$ に加えて，前期購入した耐久財の減耗を引いた分 $(1-\delta)d_1$ を用いて，2 期目の消費 c_2 と耐久財 d_2 を選ぶ．家計は 2 期目に貯蓄をすることはないとする．さらに，耐久財と非耐久財の相対価格は 1 とする．

家計の効用は，次のように表されるとする．

$$u(c_1, d_1) + \beta u(c_2, d_2)$$

このとき，次の問に答えよ．

1. 問題で与えられる情報をもとに予算制約を書き，最大化問題を定義せよ．
2. 一階条件を求めよ．特にオイラー方程式はどのような形になるか，また通常とは違う一階条件が出てくるか注意せよ．
3. 生涯予算制約を求めよ．なお，$Y \equiv y_1 + y_2/(1+r)$ と定義する．
4. $\delta = 1$ のとき，耐久財はどのような特徴をもつか直感的な解釈を述べよ．また生涯予算制約はどのように変化するか．
5. $\delta \in [0,1)$ とする．仮に $u(c_t, d_t)$ が次の対数関数で与えられるとする．

   $$u(c_t, d_t) = \alpha \log(c_t) + (1-\alpha)\log(d_t)$$

   とする．なお，$\alpha \in (0,1)$ とする．このとき消費関数を求めよ．
6. 一般的に，耐久財の消費と支出は異なる概念である．これを数式を用いて定義せよ．また企業の投資に例えると消費と支出はそれぞれ何に該当するか述べよ．