基礎マクロ練習問題：消費 (難しい問題集)

日野将志 *

目次

* タイポや間違いに気付いたら教えてください.

※分数が出てきたとき，議論の本質と関係ない問題ばかりなので，分母は非ゼロとして議論して良いとする．

1　発展：複数財

これまで，1 つの期間に 1 つの財しかない世界を扱っていた．そこで，1 つの期間に二つの財があるようなモデルを考えよう．

例えば，$t = 1, 2$ 期の財として，c_t^a, c_t^b という財が利用可能だとする．単純化のために，どちらの価格も 1 としよう．つまり，$p_t^a = p_t^b = 1$ とする．貯蓄はこれまで通り s で書き，2 期目に利子率 r が付くとする．また所得は，これまで通り，y_1 と y_2 が得られるとする．

このとき，次の問に答えよ．

- 1 期と 2 期の予算制約を書いてみよ．生涯予算制約も求めよ．
- 効用関数を

$$
\begin{aligned}
&u(c_1^a, c_1^b) + \beta u(c_2^a, c_2^b) \\
&\text{where } u(c_t^a, c_t^b) = \log(c_t^a) + \alpha \log(c_t^b)
\end{aligned}
$$

  としよう．このとき，オイラー方程式，同時点の 2 財の代替関係を表す一階条件を求めよ．
- それぞれの消費関数を求めよ．これらは生涯所得 Y とどのような関係があるか議論せよ．また，a 財と b 財の消費の比率はどうなるか．
- 1 財モデルの最適化モデルを考え，a 財と b 財を $1 : \alpha$ で割り当てるようなモデルとどのように違うか議論せよ．
- 次に各期の効用関数を

$$
u(c_t^a, c_t^b) = \log(c_t^a) + \alpha \log(c_t^b + \epsilon)
$$

  とする．ここで $\epsilon > 0$ はパラメータとする．このとき，オイラー方程式と同時点の代替関係を表す一階条件を求めよ．
  (なお，このように $u(c + \epsilon)$ のような形の効用関数を Stone-Geary 型と呼ぶ)
- それぞれの消費関数を求めよ．なお，Y は十分に大きいと仮定して良い[*1]．これらは生涯所得 Y とどのような関係にあるか議論せよ
- $\beta(1 + r) = 1$ と仮定する．このとき，a 財と b 財はどちらが必需品か答えよ (1 期の財のみ分析すれば良い)[*2]．また $\epsilon = 0$，つまり最初の効用関数のときはどうなるか．
  なお，表記を簡便化するために $A = \frac{1}{(1+\alpha)(1+\beta)}$ および $B = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1+\alpha}$ と定義する．

1.0.1　複数財：おまけ

本節では，non-homothetic utility の一例として，Stone-Geary 型を教えた．そして，Stone-Geary 型を用いることで奢侈財をモデル化できることをしめした．

*1 なぜ Y が大きいと仮定すると嬉しいのか，解いた後で考えてみると良い．

*2 なお，必需品とは所得弾力性が 0 以上 1 以下の財であり，奢侈品とは所得弾力性が 1 より大きな財を指す．

一方，奢侈財をモデル化する別の方法として，

$$u(c,d)=\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\frac{d^{1-\nu}}{1-\nu}$$

という効用関数もある．例えば，予算制約をミクロで習うような，

$$pc+d=I$$

としてみて，出来る限り解いてみよ．

2　発展：借入制約 (難しい)

背景：一般的に家計は借入を自由にすることが出来ない．例えば住宅ローンや車の購入のローンなどは存在するが，遊ぶお金のための借金などはそもそもサービスが存在していなかったりするだろう．このようなことから，家計は自由に資金を借りられず，消費の平準化が達成できないことがある．そのような状況をモデルを使って考えてみるのが，この問題の狙いである．

そこで，これまで学んだモデルに次のような追加的な制約を課してみよう．

$$s \geq 0$$

これは「貯金 $s \geq 0$ は出来るが，借金 $s < 0$ は不可能」という制約である．このような制約を借入制約**借入制約** (borrowing constraint) と呼ぶ[*3]．

効用関数は，単純化のために，最も扱いやすい対数効用関数 $u(c) = \log c$ としよう．この経済には 2 期間続くとする．次の問に答えよ．

1. 効用最大化問題を定式化せよ．なお $y_1 \neq y_2$ とすること．また，予算制約線と無差別曲線を図示してみよ．なお，無差別曲線は借入制約にひっかかるような家計の無差別曲線を描いてみよ．
2. $s \geq 0$ という不平等制約を無視した時の消費関数，貯蓄関数を一度整理せよ．仮にこのときの s を s^* というように，このときの解を $*$ 付きでと定義する．
3. $s \geq 0$ という不平等制約があるとき，一階条件を求めよ．なお，借入制約が引っかかる場合 $(s < 0)$ とそうでない場合に分けて整理せよ．
4. 最適な s を求めよ．
5. この小問では $\beta = 1$ かつ $r = 0$ とする．次の二つの場合に，s はどのような値をとるか答え，簡単な解釈を加えよ．
   - $(y_1, y_2) = (2, 1)$ の場合
   - $(y_1, y_2) = (1, 2)$ の場合

   さらにこの回答から，より一般に y_1 と y_2 の大小関係でどのように結果が変わるか，簡単に議論せよ．
6. (前問の β や r の条件は忘れて，)s^* はどのようなパラメータのときに，正，ゼロ，負の値をとるか，まとめよ．
7. 最適な消費関数を求めよ
8. 借入制約が引っかかるような場合の限界消費性向を求めよ

2.1

次の問題は解答例はないが，借入制約の理解を深めたい学生は試してみると良いと思う．

- 借入制約の一般化：$s \geq 0$ ではなく，$\underline{s} \leq 0$ というパラメータに対して，$s \geq \underline{s}$ という借入制約がある場合で，さきほどの問いに答えてみよ．

[*3] 借入が出来ない制約であるため無借入制約 (no-borrowing constraint) や，負債の限界という意味で debt limit と呼ぶこともある．

- 効用関数の変更：効用関数を対数から，CRRA や 2 次，CARA 型効用関数にして解いてみよ

2.2　発展：利子率の違い (とても難しい)

現実には，貯蓄と借入の利子率が違うということが考えられる．例えば，普通預金で貯金する際の利子率は 0.001% であったりするが，クレジットカードのカードローン，マイカーローン等は 3% 以上の利子率を取っている．

このようなことをモデル化することを考えよう．これは次のようにすればモデル化できる．

$$r(s) = \begin{cases} r^l & \text{if } s \geq 0 \\ r^h & \text{if } s < 0 \end{cases}$$

ここで $r^l < r^h$ とする．これはつまり，貯蓄をしている $(s \geq 0)$ ときの利子率は r^l であり，借り入れをしているときは高い利子率 r^h であることを意味している．

効用関数は，単純化のために，最も扱いやすい対数効用関数 $u(c) = \log c$ としよう．この経済には 2 期間続くとする．次の問に答えよ．

このとき次の解いに答えよ．

1. 最適化問題を書いてみよ．また無差別曲線と予算制約線を図示してみよ．
2. $s \gtreqless 0$ によって場合分けを行い，一階条件を書いてみよ
3. $s \geq 0$ のときと，$s < 0$ のときで最適な s を求めよ
4. 最適な消費を求めよ

3　発展：Two Type Agent Model とケインズ消費関数

経済に無数の人がおり，この人口を 1 と基準化しよう．この人口を見ると家計は 2 種類に分けられるとする．$\mu \in (0,1)$ 割合の家計は，Savers(貯蓄者) というタイプの家計であり，もう一方 $1-\mu$ 割合の家計は，Spenders(支出者) というタイプの家計である．そしてこれらの家計は経済の総所得 Y_t を人口比の加重をかけることで均等に分け合っているとする．

Savers と分類された家計は，対数効用関数をもちこれまでの 2 期間モデルで習ったように行動するとする．つまり，

$$\begin{aligned} \max_{c_1,c_2,s} \; & \log(c_1)+\beta\log(c_2) \\ \text{s.t. } & c_1+s=Y_1 \\ & c_2=Y_2+(1+r)s \end{aligned}$$

という最大化問題を解いて，消費と貯蓄を選択する．

一方，Spenders(支出者) というタイプは常に借入制約に直面しており，貸借が全く出来ない．その結果，

$$\hat{c}_t = Y_t$$

という行動を行うとする．

2 種類の家計は各期に Y_t という総所得を，人口の割合ずつ分け合っている．

このとき，次の問に答えよ．

- 経済全体の 1 期の消費に関する消費関数を求めよ
- 経済全体の Y_1 に対する c_1 の限界消費性向を求めよ
- 限界消費性向は μ が変化すると増加するか，減少するか求めよ．そして理由を簡潔に説明せよ．

注：この Savers and Spenders というモデルは Campbell and Mankiw (1989) 以降よく使われている．

4　発展：恒常所得と消費：遺産の役割

これまで様々なモデルを解いてきた．借入制約や Savers and Spenders のモデルを除き，2 期間モデルの消費関数は，

$$c_t = \alpha Y$$

と恒常所得 Y に比例する関数として描かれてきた．しかし，実際にはこの比例関係は成り立たないことが指摘されている[*4]．その一因として，**遺産** (bequest) が存在することが考えられる．そのことを本章で考えてみよう．

次のような目的関数を考えよう．

$$u(c_1)+\beta u(c_2)+\beta v(s_2)$$

[*4] 例えば Straub (2019) “Consumption, Savings, and the Distribution of Permanent Income.”

特に新しい項は $v(s_2)$ である．これは 2 期目の期末に貯蓄 s_2 を残しておくと，そのことから効用を感じるという仮定である．これは親が子に対して資産を残しておくことで幸せを感じることだと解釈できる．英語では，warm glow bequest motive と呼ばれる．

このとき，次の問に答えよ．

1. 2 期目の予算制約を書いてみよ．通常の予算制約をどのように修正する必要があるか議論せよ．
2. 生涯予算制約を求めよ．なお生涯予算制約に s_2 が入っていても良い．
3. $u(c) = \log(c)$ かつ $v(s_2) = B\log(s_2)$ として最大化問題を解き，c_1 の消費関数を求めよ．この消費関数と恒常所得 Y の関係を簡単に議論せよ．この関数は標準的なモデル $(B = 0)$ とどう異なるか．
4. $v(s_2)$ のみ $B\frac{s_2^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ と仮定して，再度解いてみよ．