基礎マクロ：数学レビュー

日野将志

一橋大学

2021

学部の経済学で使う数学は限られている！

一般的に経済学部で卒業のための最低限

- 微分
  ミクロ、マクロ、計量等全ての分野で使います

良い成績を目指す場合

- 行列、線形代数
  特に中級計量等で使うと思います．また数値計算でも使うかもしれません

大学院に進学する場合の最低限

- 基礎的な集合、位相
- 最適化数学 (凸解析)

覚えてほしい事

絶対に覚えてほしい事

- 学部の経済学では，「微分して 0 でほぼ全ての最適化問題が解ける」と言っても過言ではないくらい「微分して 0」は大事
- 微分は大事

このスライドで学ぶこと

ウォームアップ
一変数関数の微分
一次元の最適化
高階の微分
多変数の微分
多変数関数と最適化
補足

ウォームアップ：ベクトル，和，積，極限

ベクトル・内積

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ をベクトルと呼ぶ

- $\{x_1, \ldots, x_n\}$ は集合なので一応，注意

同じ長さの 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の次の計算を内積と呼ぶ.

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

(コメント：少なくとも経済数学 (大学数学？) では $\vec{x}$ という記法は使わない方が大多数)

足し算

足し算には $\sum$ という記号をよく使います

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

例

$(x_1, x_2, x_3) = (5, 8, 2)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} x_i &= x_1 + x_2 + x_3 = 5 + 8 + 2 \\ &= 15\end{aligned}$$

ベクトルの内積は，

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

掛け算

掛け算には $\prod$ という記号をよく使います

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$$

例

$(x_1, x_2, x_3) = (5, 8, 2)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{3} x_i &= x_1 \times x_2 \times x_3 \\ &= 5 \times 8 \times 2 \\ &= 80\end{aligned}$$

極限

(注意：厳密なことは扱いません！)

極限とは,「限りなく近づくとき」のことです。lim と表記します。
代表的には、次の 2 つの場合がほとんどです。

- 無限大に限りなく近づくとき (つまり物凄く大きくなる)
- 0 に限りなく近づくとき

例

$1/x$ を考える．このとき

- x が無限大に限りなく近づくとき、$1/x$ は 0 に収束します

$$\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$$

- x が 0 に限りなく近づくとき、$1/x$ は無限大に発散します

$$\lim_{x \to 0} 1/x = \infty$$

経済学部でよく使う微分の公式

一変数関数の微分

微分の復習

傾き：関数 $y = f(x)$ の傾き $\Delta y/\Delta x$
微分：「x が少し (Δx) だけ変化したときに、y がどれだけ変化するか」

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- 表記：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, f'(x), f_x(x)$ 等と書きます
- 導関数：関数 f を微分して得た、$f'(x)$ のことを導関数と呼びます

例

$y = x^2$ の $x = 1$ における傾き：$\Delta y / \Delta x$

- 差分 Δx が 0.1 の場合

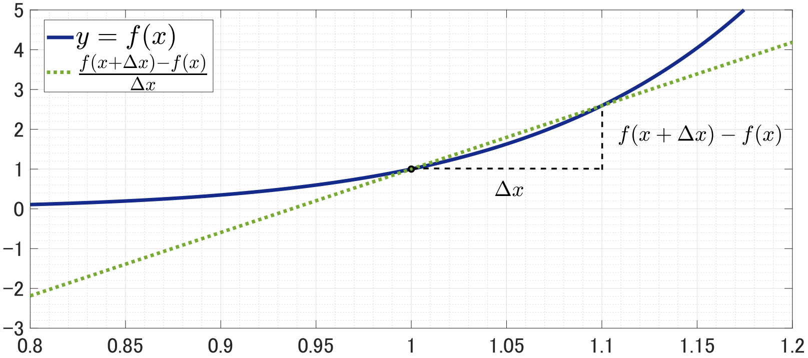
$$\frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1} = \frac{(1.1)^2 - (1.0)}{1.1 - 1.0} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$$

- 差分が 0.01 の場合

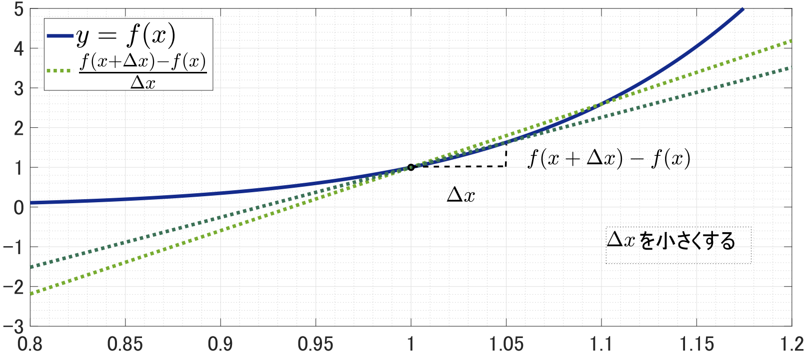
$$\frac{f(1.01) - f(1)}{1.01 - 1} = \frac{(1.01)^2 - (1.0)}{1.01 - 1.0} = \frac{0.0201}{0.01} = 2.01$$

- 差分が 0.001 の場合：2.001
- 差分が 0 に近づくとき (極限)：2

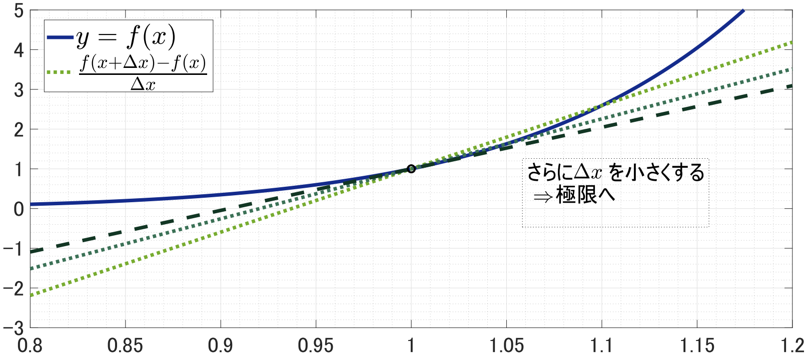
図による例 (1/3)


$y = f(x)$
$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$f(x+\Delta x) - f(x)$
Δx
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
0.8
0.85
0.9
0.95
1
1.05
1.1
1.15
1.2

図による例 (2/3)


$y = f(x)$
$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$f(x+\Delta x) - f(x)$
Δx
Δx を小さくする
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
0.8
0.85
0.9
0.95
1
1.05
1.1
1.15
1.2

図による例 (3/3)



$y = f(x)$
$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
さらにΔx を小さくする
$\Rightarrow$極限へ
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
0.8
0.85
0.9
0.95
1
1.05
1.1
1.15
1.2

よくつかう微分の公式

絶対に覚えてほしい公式：

- $f(x) = x^a$ のとき (a は定数)

$$f'(x) = ax^{a-1}$$

- $f(x) = \log x$ のとき

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

例

$f(x) = x^2$ のとき $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$

よく使う公式 (cont'd)

- 加法：$f(x) + g(x)$ のとき、この導関数は
$$f'(x) + g'(x)$$
- 乗法：$f(x)g(x)$ のとき、この導関数は
$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
- 除法：$f(x)/g(x)$ のとき、この導関数は
$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
- 合成関数：$f(g(x))$ のとき、この導関数は
$$f'(g(x))g'(x)$$

計算例

あえて複数の方法で微分が出来る例で確認

例

- 商の微分 $f(x) = x^a/x$
  - 方法 1：$f(x) = x^{a-1}$ なので，普通に微分して $f'(x) = (a-1)x^{a-2}$
  - 方法 2：商の微分公式より $f'(x) = \frac{ax^{a-1}x - x^a}{x^2} = \frac{ax^a - x^a}{x^2} = (a-1)x^{a-2}$
- 合成関数の微分 $f(x) = (x^a)^b$
  - 方法 1：$f(x) = x^{ab}$ なので，$f'(x) = abx^{ab-1}$
  - 方法 2：$g(x) = x^a$ かつ $f(x) = x^b$ とする．このとき，$g'(x) = ax^{a-1}$ と $f'(x) = bx^{b-1}$ である．したがって，$f'(g(x))g'(x) = b(x^a)^{b-1} \times ax^{a-1} = ab(x^a)^{b-1}x^{a-1} = abx^{a(b-1)}x^{a-1} = abx^{a(b-1)+a-1} = abx^{ab-1}$

練習問題参照

よく使う微分公式 (cont'd)

逆関数の微分：
微分可能な関数 $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在するとする．さらに b と a を $b = f(a)$ を満たす点とする．このとき $f'(x) \neq 0$ ならば，

$$f'(a) = \frac{1}{f^{-1'}(b)}$$

例

$y = 8x^3$ とする．このとき，この逆関数は $x = y^{1/3}/2$ である．$b = 8a^3$ とする．このとき，

$$f'(x) = 24x^2, \quad f^{-1'}(y) = \frac{1}{6}y^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(a) = 24a^2 = \frac{1}{\frac{1}{6}(8a^3)^{-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{f^{-1'}(b)}$$

最適化入門：一変数関数

微分と最適化

なぜ微分が経済学で重要か？

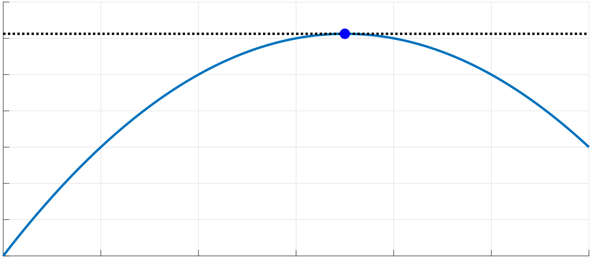


Figure: 傾きと最大化のイメージ図

傾き (導関数)$=0$ の部分で最適化問題を解くことが出来る！一階の条件
とても便利だから良く使われる.

例：微分を使った最適化

例

- 例１：$f(x) = -x^2$ の導関数は $f'(x) = -2x$.

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

  $x = 0$ で最大化される

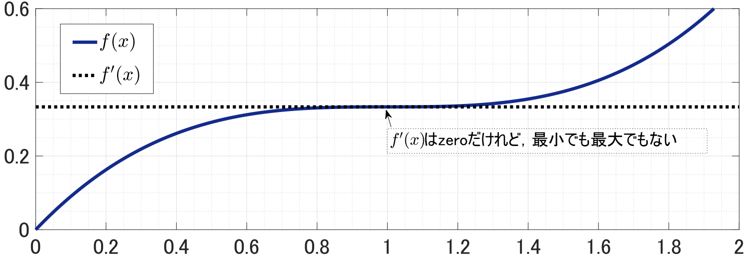
- 例２：$f(x) = (2x-3)(x-2)$ の導関数は

$$f'(x) = 2(x-2) + (2x-3) = 4x - 7$$

  そして、$f'(x) = 4x - 7 = 0$ とは $x = 7/4$ のとき。つまり $x = 7/4$ で f は最小化される。

注意点

- 傾き = 0 の方法は便利
- 注意：傾き = 0 の方法だと、最大化を解いているのか、最小化を解いているのか分からない
  - 極端な場合、最大化でも最小化でもない、次のようなケースもありえる



コメント：経済学では，モデルを作る時点でこういう面倒なことが起きないように工夫することが一般的

高階の微分

高階の微分

微分を取れるのは 1 回とは限らない。

例

$f(x) = x^a$ を $a \neq 1$ とする。

- 1 回目 $f'(x) = ax^{a-1}$
- 2 回目 $f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$
- 3 回目 $f'''(x) = a(a-1)(a-2)x^{a-3}$
- $\vdots$

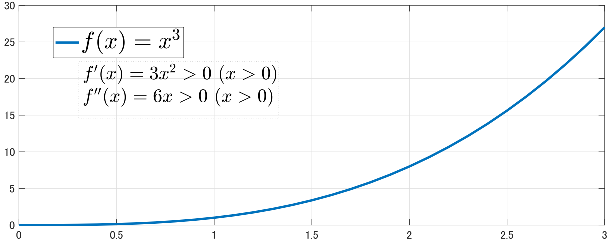
2 回目の導関数を二階の導関数 (2nd-order derivative) と言う

高階の微分と関数の形

高階の微分は、関数 f の形状を知るために便利

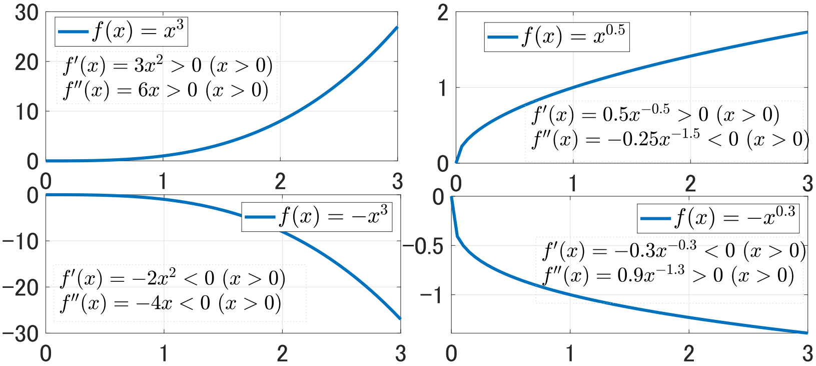
例

- $f'(x) > 0$： 右上がり
- $f''(x) > 0$：どんどん傾きが大きくなる



高階の微分と関数の形のまとめ: 図示

4つのパターン：$f'(x) \gtrless 0$ & $f''(x) \gtrless 0$



高階の微分と関数の形のまとめ

- $f' > 0, f''>0$、右上がり、下に凸
- $f' > 0, f''<0$、右上がり、上に凸
- $f' < 0, f''>0$、右下がり、下に凸
- $f' < 0, f''<0$、右下がり、上に凸

1 階微分 $\Rightarrow$ 右上がりかどうか
2 階微分 $\Rightarrow$ 凸の向き

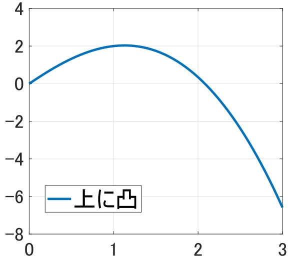
経済学的には二番目のケースが頻出

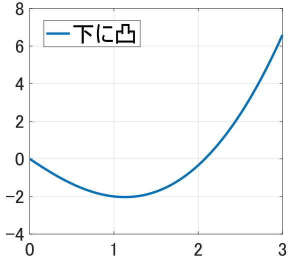
(補足：$f'' = 0$ の場合，凸の向きが変わる．23 頁の例)

高階の微分と最適化

- 上に凸のとき
  導関数 $=0 \Rightarrow$ 最大化解
- 下に凸のとき
  導関数 $=0 \Rightarrow$ 最小化解

このように凸の向き (つまり 2 階の導関数) は、最適化と密接に関連！





2 階の導関数による条件を 2 階の条件と呼ぶ

多変数関数と微分

ちょっとした応用：多変数関数

$y = f(x_1, x_2)$

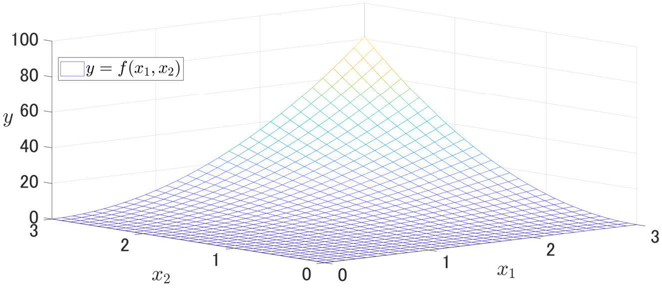


Figure: $y = x_1^2 x_2^2$ の例

これの微分を考えよう

- 偏微分と全微分

偏微分

- 多変数関数 $f(x_1, x_2)$ の偏導関数とは、残りの変数 (例えば x_2) を固定して、x_1 が動いた時の傾き
- $\frac{\partial y}{\partial x}$, $f_{x_1}(x_1, x_2)$ や $f_1(x_1, x_2)$ 等と表す

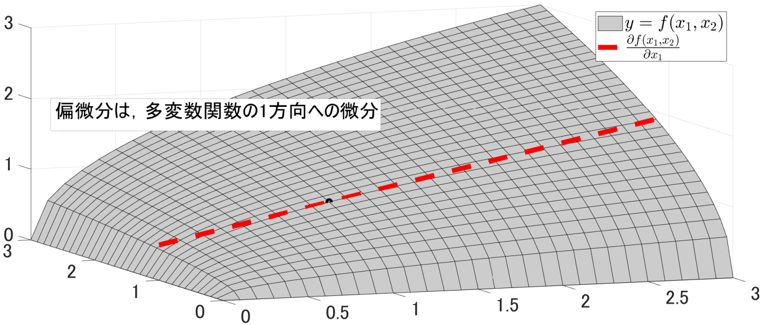
計算上の考え方：残りの変数は固定するので、x_2 は定数と思えばよい。

例

$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ の x_1 に対する偏導関数は

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2x_1^{2-1}x_2^2 = 2x_1x_2^2$$

偏微分の図解



- ここで x_2 は固定されている (パラメータのようなもの).
- 縦か横のみ (斜めはではない)

全微分

- 多変数関数 $f(x_1, x_2)$ の全導関数とは、x_1 と x_2 の両方が動いた時の傾き
- $\mathrm{d}f(x_1, x_2)$ 等と表す
- 計算方法は、

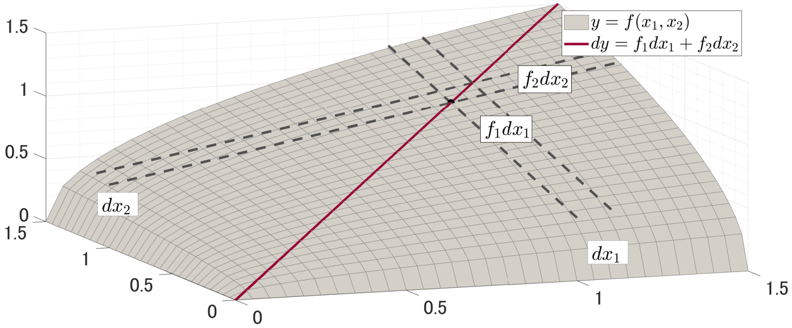
$$\mathrm{d}f(x_1, x_2) = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

例

$x_1^2 x_2^2$ の全導関数 $\mathrm{d}f(x_1, x_2)$ は

$$\mathrm{d}f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2^2 \mathrm{d}x_1 + 2x_1^2 x_2 \mathrm{d}x_2$$

全微分の図解



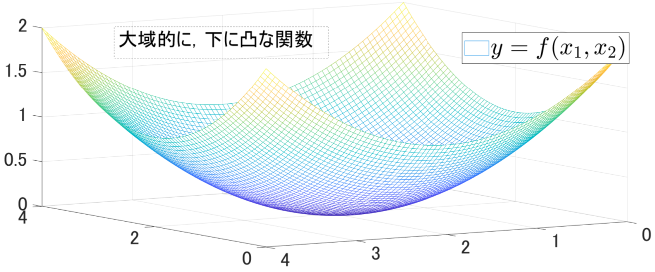
- 全微分では x_1, x_2 両方とも動かす．(斜め！)

多変数関数と最適化

多変数関数と最適化

- 数学の理論的には面倒なケースが多々考えられる
- (特に学部や修士の) 経済学の間では，そんな面倒なケースはまず出てこない
  - 数学的には，(大域的に) 凸な関数のみに注目する

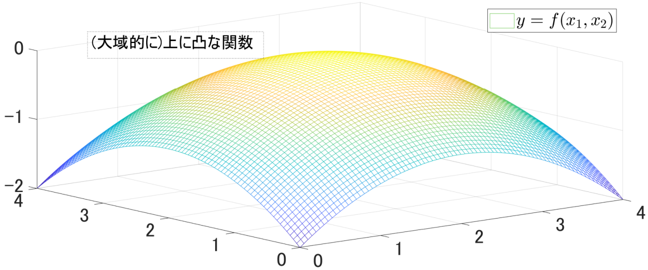
(大域的に) 下に凸な関数



下に凸な関数は

- $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0$ かつ $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0$ な点が最小化解

(大域的に) 上に凸な関数



上に凸な関数は

- $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0$ かつ $\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0$ な点が最大化解

今回のまとめ

おそらく概念的に難しいのは

- 高階の微分
  - 凸の方向の向きと深く関係．したがって，最適化と関係
- 多変数関数の微分
  - 偏微分と全微分
- 最も大事なこと：学部の経済学で出てくるほぼ全ての最適化は「微分して０」で解ける

コメント：使っていくうちに慣れるので，今はよく分からなくても大丈夫だと思います

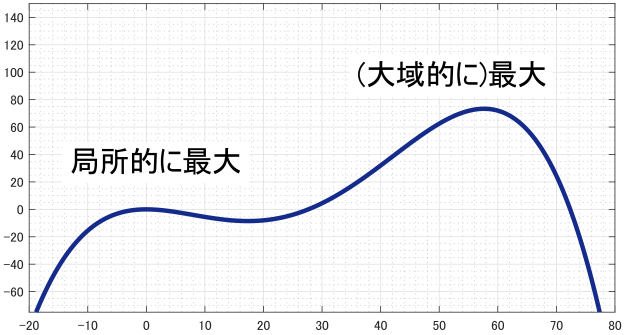
意欲的な人へ

意欲的な人は経済数学の最適化の部分を読むと良いと思います.

- 岡田『経済学・経営学のための数学』
- Sundaram “A First Course in Optimization Theory” (やりすぎ？)

補足

局所的最大と最大

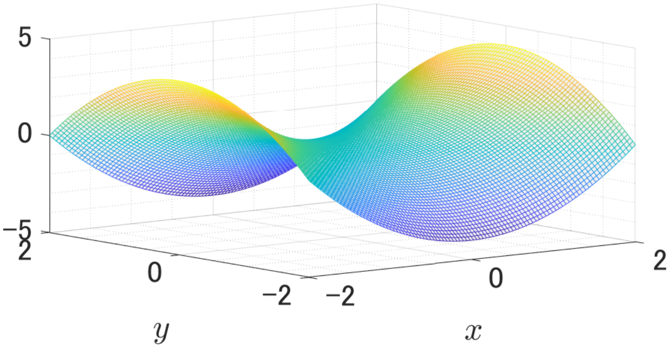


- 局所的に最大 (local maximum)：その点の近傍 (近く) で最大
- (大域的に) 最大 (global maximum)：定義域全体の中で最大

局所的最小も同様に定義できる

コメント：数学的に重要な違いだけど，学部の経済学で出てくるほぼ全ての最大化問題には局所的な最大は出てこない．

補足用：多変数関数で面倒なケース



x 軸方向には下に凸，y 軸方向には上に凸

鞍点 (あんてん、saddle point)：多変数関数の変域の中で、ある方向で見れば極大値だが別の方向で見れば極小値となる点

コメント：学部の経済学ではこういう面倒なケースは出てきません