

基礎マクロ練習問題：数学

日野将志*

1 微分の計算

次の微分をせよ（「導関数を求めよ」と言った方が正確なので、以降ではそう表記します）。

1. $f(x) = a$
2. $f(x) = a \log x$
3. $f(x) = \frac{x^{1-a}}{1-a}$
4. $f(x) = x^a y^b$
5. $f(x) = [x^a + y^a]^{1/a}$
6. $f(x) = -\frac{1}{a} \exp(-ax)$

2 最適化と高階の微分

以下を最適化の目的関数とする。このとき、その一階の条件を満たす x^* を求めよ*¹。またその x^* が最小化なのか最大化なのか確認せよ。

1.

$$\log x - 2x$$

なお、 x は正の値のみを取るとする ($x > 0$)。

2.

$$5x - x^2$$

3.

$$1 - \exp(-3x)/3 - x$$

3 多変数の微分

3.1 偏微分

以下の関数を x と y でそれぞれ偏導関数を求めよ。

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

¹ 一階の条件とは $f'(x^) = 0$ という条件のこと。

1. $f(x, y) = x^a y^b$
2. $f(x, y) = a \log(xy)^b$
3. $f(x, y) = a \log x + b \log y$
4. $f(x, y) = [ax^b + (1-a)y^b]^{1/b}$

3.2 全微分

以下の関数を x と y でそれぞれ全微分せよ.

1. $f(x, y) = x^a y^b$
2. $f(x, y) = a \log(xy)^b$
3. $f(x, y) = a \log x + b \log y$
4. $f(x, y) = [ax^b + (1-a)y^b]^{1/b}$

4 多変数の最適化

次の最適化問題はいずれも最大化問題である. このとき目的関数を最大化する (x^*, y^*) を求めよ.

1.

$$\max_{x,y} 2 \log x + 3 \log y - 2x - 3y$$

ここで (x, y) の定義域は 0 以上のみとする ($(x, y) > 0$).

2.

$$\max_{x,y} x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{2}{5}} - 0.2x - 0.4y$$

3.

$$\max_{x,y} 5x - x^2 + 3y - y^2$$