基礎マクロ：ラグランジュ未定乗数法の使い方

日野将志

一橋大学

2021

ラグランジュ (未定乗数) 法のイントロ

ラグランジュ (未定乗数) 法はとても便利：

- (良い点)：代入法では解けない問題が解ける
  - 逆は成り立たない．つまり,「ラグランジュ法で解けないけど，代入法では解ける」ような問題はない
  - なのでラグランジュ法を覚えた後は，ラグランジュ法のみ使う
  - (例１)：制約が不等式のときでも使える
  - (例２)：制約が非線形の関数形でも使える (e.g. 社会的計画者)
- (悪い点)：ラグランジュ法はちょっと理解しにくい (かも)

ラグランジュ (未定乗数) 法のイントロ

ラグランジュ (未定乗数) 法はとても便利：

- (良い点)：代入法では解けない問題が解ける
  - 逆は成り立たない．つまり,「ラグランジュ法で解けないけど，代入法では解ける」ような問題はない
  - なのでラグランジュ法を覚えた後は，ラグランジュ法のみ使う
  - (例１)：制約が不等式のときでも使える
  - (例２)：制約が非線形の関数形でも使える (e.g. 社会的計画者)
- (悪い点)：ラグランジュ法はちょっと理解しにくい (かも)

一般的な表記：

これまで 2 期間モデルや，労働時間の選択を学んだ．また，ミクロ経済学でも最適化を学んでいると思う．それらを一般に次のように表記する．

$$\max_{c} u(c)$$

$$\text{s.t. } g(c) \geq 0$$

- 制約の範囲内 $g(c) \geq 0$ で $u(c)$ を最大化する c を探す
- 例
  (1) 生涯予算制約 $g(c_1, c_2) \equiv y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r}$
  (2) 静学的な労働 $g(c, h) \equiv wh - c$
- $g(c)$ は複数の制約や複数の変数でも良い
  - 複数の制約：$g_1(c) \geq 0$ かつ $g_2(c) \geq 0$
  - 複数の変数：$g(c_1, c_2, \ldots, c_N) \geq 0$
- 不等号は等号の一般化
  - ※このスライドでは，等号で成り立つ場合 ($g(c) = 0$) のみ考える
  - 不等号のケースはちょっとだけ面倒

一般的な表記：

これまで２期間モデルや，労働時間の選択を学んだ．また，ミクロ経済学でも最適化を学んでいると思う．それらを一般に次のように表記する．

$$\max_{c} u(c)$$
$$\text{s.t. } g(c) \geq 0$$

- 制約の範囲内 $g(c) \geq 0$ で $u(c)$ を最大化する c を探す
- 例
  (1) 生涯予算制約 $g(c_1, c_2) \equiv y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r}$
  (2) 静学的な労働 $g(c, h) \equiv wh - c$
- $g(c)$ は複数の制約や複数の変数でも良い
  - 複数の制約：$g_1(c) \geq 0$ かつ $g_2(c) \geq 0$
  - 複数の変数：$g(c_1, c_2, \ldots, c_N) \geq 0$
- 不等号は等号の一般化
  - ※このスライドでは，等号で成り立つ場合 ($g(c) = 0$) のみ考える
  - 不等号のケースはちょっとだけ面倒

一般的な表記：

これまで２期間モデルや，労働時間の選択を学んだ．また，ミクロ経済学でも最適化を学んでいると思う．それらを一般に次のように表記する．

$$\max_{c} u(c)$$
$$\text{s.t. } g(c) \geq 0$$

- 制約の範囲内 $g(c) \geq 0$ で $u(c)$ を最大化する c を探す
- 例
  (1) 生涯予算制約 $g(c_1, c_2) \equiv y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r}$
  (2) 静学的な労働 $g(c, h) \equiv wh - c$
- $g(c)$ は複数の制約や複数の変数でも良い
  - 複数の制約：$g_1(c) \geq 0$ かつ $g_2(c) \geq 0$
  - 複数の変数：$g(c_1, c_2, \ldots, c_N) \geq 0$
- 不等号は等号の一般化
  - ※このスライドでは，等号で成り立つ場合 ($g(c) = 0$) のみ考える
  - 不等号のケースはちょっとだけ面倒

一般的な表記：

これまで２期間モデルや，労働時間の選択を学んだ．また，ミクロ経済学でも最適化を学んでいると思う．それらを一般に次のように表記する．

$$\max_{\boldsymbol{c}} u(\boldsymbol{c})$$

$$\text{s.t. } g(\boldsymbol{c}) \geq 0$$

- 制約の範囲内 $g(\boldsymbol{c}) \geq 0$ で $u(\boldsymbol{c})$ を最大化する $\boldsymbol{c}$ を探す
- 例
  (1) 生涯予算制約 $g(c_1, c_2) \equiv y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r}$
  (2) 静学的な労働 $g(c, h) \equiv wh - c$
- $g(\boldsymbol{c})$ は複数の制約や複数の変数でも良い
  - 複数の制約：$g_1(\boldsymbol{c}) \geq 0$ かつ $g_2(\boldsymbol{c}) \geq 0$
  - 複数の変数：$g(c_1, c_2, \ldots, c_N) \geq 0$
- 不等号は等号の一般化
  - ※このスライドでは，等号で成り立つ場合 ($g(\boldsymbol{c}) = 0$) のみ考える
  - 不等号のケースはちょっとだけ面倒

ラグランジュ法の計算方法

- 次のような関数をラグランジュ関数 (または Lagrangian) と呼ぶ

$$\mathcal{L}(c, \lambda) = u(c) + \lambda[g(c)]$$

  λ はラグランジュ乗数と呼ぶ
  - ラグランジュ関数 = 目的関数 + ラグランジュ乗数 × 予算制約 (≥ 0)
  - よく間違える点：$g \leq 0$ の形にしてはいけない

- これを微分して 0

$$c \ : u'(c) + \lambda g'(c) = 0$$

$$\lambda \ : g(c) = 0$$

  これを満たすような c が最適化の解

ラグランジュ法の計算方法

- 次のような関数をラグランジュ関数 (または Lagrangian) と呼ぶ

$$\mathcal{L}(c, \lambda) = u(c) + \lambda[g(c)]$$

λ はラグランジュ乗数と呼ぶ

  - ラグランジュ関数 = 目的関数 + ラグランジュ乗数 × 予算制約 (≥ 0)
  - よく間違える点：$g \leq 0$ の形にしてはいけない

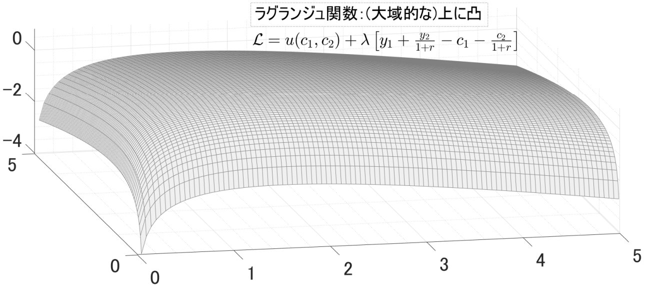
- これを微分して 0

$$c \ : u'(c) + \lambda g'(c) = 0$$

$$\lambda \ : g(c) = 0$$

これを満たすような c が最適化の解

ラグランジュ関数の図示



- 元の u が単調増加関数でも，ラグランジュ関数 $\mathcal{L}$ は上に凸な関数になる
- ラグランジュ関数を「微分して 0」を解けば OK
  - (コメント：必要であれば数学の講義を復習)

例１：静学的な労働選択

例：静学的な労働選択

$$\max_{c,l} \ \log(c) + \log(l)$$

$$\text{s.t.} \quad \underbrace{c}_{\text{消費}} \leq \underbrace{w(1-l)}_{\text{所得}}$$

ラグランジュ関数

$$\mathcal{L}(c,l,\lambda) = \log(c) + \log(l) + \lambda[w(1-l) - c]$$

これを c，l，λ についてそれぞれ微分して 0 とする

$$c : \frac{1}{c} - \lambda = 0$$

$$l : \frac{1}{l} - \lambda w = 0$$

$$\lambda : w(1-l) = c$$

上 2 本の式を λ について代入して，予算制約を代入する (次のページ)

例：静学的な労働選択 (cont'd)

前ページの上２本の式を λ について代入して，予算制約を代入する

$$\frac{w}{c} = \frac{1}{l}$$
$$\Rightarrow \frac{w}{w(1-l)} = \frac{1}{l}$$
$$\Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

同じ解が得られた．同様に (c, h) も代入法と同じものが得られる．

例２：2 期間の消費

例２：２期間の消費

今度は２本制約式がある

$$\max_{c_1, c_2} \log(c_1) + \beta \log(c_2)$$

$$\text{s.t.} \quad c_1 + s \leq y_1$$

$$c_2 \leq y_2 + (1+r)s$$

このとき，ラグランジュ関数は，

$$\mathcal{L}(c_1, c_2, s, \lambda_1, \lambda_2) = \log(c_1) + \beta \log(c_2) + \lambda_1 [y_1 - c_1 - s] + \lambda_2 [y_2 + (1+r)s - c_2]$$

となる．

例２：二期間の消費 (cont'd)

ラグランジュ関数 (再掲)

$$\mathcal{L}(\cdot) = \log(c_1) + \beta \log(c_2) + \lambda_1[y_1 - c_1 - s] + \lambda_2[y_2 + (1+r)s - c_2]$$

この一階の条件は,

$$\begin{aligned} c_1 &: \frac{1}{c_1} = \lambda_1 \\ c_2 &: \beta\frac{1}{c_2} = \lambda_2 \\ s &: \lambda_1 = \lambda_2(1+r) \\ \lambda_1 &: c_1 + s = y_1 \\ \lambda_2 &: c_2 = y_2 + (1+r)s \end{aligned}$$

となる．上３本を解くと，次のようにオイラー方程式を得る (これ以降は代入法と同じ計算)

$$\frac{1}{c_1} = \beta(1+r)\frac{1}{c_2}$$

まとめ

ラグランジュ未定乗数法の使い方

- ラグランジュ関数 = 目的関数 + ラグランジュ乗数 × 予算制約 (≥ 0)
- ラグランジュ関数を内生変数に関して「微分してゼロ」
  - 「λ に関して微分を取らない」人もいる
    - 別にそれでも解けるが，数学的には λ に関しても微分を取る方が正確

初級より上のレベルのミクロ・マクロでは頻出

補足：ラグランジュ関数の意味

$$\mathcal{L} = u(c) + \lambda[g(c)]$$

- λ は制約 $g(c)$ を破ることによる (内生的な) ペナルティ
  - λ が小さい $\Rightarrow$ 制約を破ってしまう ($g(c) < 0$)
  - λ が大きい $\Rightarrow$ 制約を守り過ぎる ($g(c) > 0$)
  - λ がちょうどいい $\Rightarrow$ ちょうど制約が守られる ($g(c) = 0$)
- $\Rightarrow$ ラグランジュ法はちょうどいい λ を選ぶことで，予算をちょうど守りながら，目的を最大化する解を見つける！

証明はやりません (経済学者でも証明をやったことある人は多くない気が…)